VALIDATION DE LA FAMILLE DE CRITÈRES ET DÉVELOPPEMENT D'UN OUTIL DE VISUALISATION POUR LE PROTOTYPE CESA

Rapport final du projet de recherche # W7710-7-0878
pour le centre de recherche pour la défense de Valcartier (CRDV)

Autorités scientifiques :
Mme Micheline Bélanger
Dr Irène Abi-Zeid

Membres de l'équipe de recherche

Prof. Jean-Marc Martel, responsable
M. Adel Guitouni
M. Khaled Jabeur

Département Opérations et Systèmes de Décision
Faculté des sciences de l'administration, Université Laval, Québec (Qc), Canada G1K 7P4

Mars 1998

Table des Matières

1. INTRODUCTION 4

1.1. SOMMAIRE DES RÉSULTATS DU PROJET W7701-6-1580 6
1.2. RECOMMANDATIONS DU PROJET W7701-6-1580 9
1.3. PROCESSUS DE VALIDATION DE LA FAMILLE DE CRITÈRES PROPOSÉE POUR LE CESA 10
1.4. ORGANISATION DU DOCUMENT 11

2. OPÉRATIONNALISATION D'UNE FAMILLE (COHÉRENTE) DE CRITÈRES DANS LE CADRE DU PROJET CESA 11

2.1. LE FACTEUR DE FLEXIBILITÉ 12
2.1.1. Le critère (C_1) : couverture des tâches opérationnelles identifiées 12
2.1.2. Le critère (C_2) : couverture des localisations possibles de la mission 14
2.1.3. Le critère (C_3) : couverture des suites d'actions possibles de l'ennemi 15
2.2. LE FACTEUR COMPLEXITÉ 16
2.2.1. Le critère (C_4) : Complexité des opérations 16
2.2.2. Le critère (C_5) : Complexité logistique 20
2.2.3. Complexité de commandement et de contrôle (C_6) 21
2.3. LE FACTEUR D'ACCOMPLISSEMENT (CRITÈRE ACCOMPLISSEMENT : C_7) 23
2.4. LE FACTEUR D'UTILISATION OPTIMALE DES RESSOURCES (CRITÈRE C_8) 24
2.5. LE FACTEUR RISQUE 25
2.5.1. Le critère (C_9) : impact des écarts de couverture 25
2.5.2. Le critère (C_{10}) : Perte en personnel militaire 26
2.5.3. Le critère (C_{11}) : Dommage collatéral 29
2.5.4. Le critère (C_{12}) : Risque de confrontation 29
2.5.5. Le critère (C_{13}) : Fiabilité des équipements 30
2.5.6. Le critère (C_{14}) : Efficacité du personnel impliqué dans la COA 33
2.6. TABLEAU RÉCAPITULATIF DES CRITÈRES RETENUS SUITE À L'ÉTAPE DE VALIDATION 36

3. DÉTERMINATION DES SEUILS DE DISCRIMINATION 37

3.1. MÉTHODE DIRECTE POUR OBTENIR LES VALEURS DES SEUILS 38
3.2. VALEUR PAR DÉFAUT POUR LES SEUILS DE DISCRIMINATION ET DE VETO 41

4. LA DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS D'IMPORTANCE RELATIVE DES CRITÈRES 45

4.1. LA MÉTHODE PROPOSÉE 46
4.2. ÉCHELLE NUMÉRIQUE ASSOCIÉE À L'ÉCHELLE SÉMANTIQUE 47
4.2.1. Première façon 47
4.2.2. Deuxième façon 48
4.3. RANGEMENT DES CRITÈRES ET JUGEMENTS PAR PAIRE 49
4.4. QUANTIFICATION DES JUGEMENTS SUBJECTIFS 51

5. L'ANALYSE DE SENSIBILITÉ DANS LE CADRE DU PROJET CESA 52

5.1. DÉFINITION 53
5.2. ANALYSE DE SENSIBILITÉ SUR LES POIDS DES CRITÈRES 54
5.3. OPÉRATIONNALISATION DE CES DIFFÉRENTES ANALYSES DE SENSIBILITÉ 58
5.3.1. Les méthodes d'aide multicritère à la décision additives : définition 58
5.3.2. Construction d'intervalles de stabilité de poids (ISP)(Mareschal, 1988) 61
5.3.3. La stabilité de poids (Wolters et Mareschal, 1995) 67
5.4. ANALYSE DE SENSIBILITÉ SUR LES SEUILS DE DISCRIMINATION 71

6. MODULE EXPLICATIF DES RÉSULTATS DE LA PROCÉDURE PAMSSEM 72

6.1. LES IMAGES ÉCRANS DE PRÉSENTATION GLOBALES 72
6.2. LES IMAGES ÉCRAN DE PRÉSENTATION DÉTAILLÉE 76
6.3. LES IMAGES ÉCRAN POUR LES ANALYSES DE SENSIBILITÉ 82

7. CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS 86

1. Introduction

Le Centre de recherche pour la défense de Valcartier (CRDV) a entrepris des travaux pour développer un système d'aide à la décision pour le commandement et contrôle d'interventions dans un contexte de protection de l'espace aérien canadien. Dans une première version du CESA («*Commander's Expert System Advisor*»), on a cherché à offrir au personnel militaire un outil pour décrire un événement de violation de l'espace aérien canadien, de définir un ensemble de suites d'actions, et d'évaluer ces suites d'actions à partir de plusieurs facteurs (flexibilité, complexité, niveau de risque, capacité d'accomplissement, utilisation optimale des ressources) et sous-facteurs. Pour concevoir ce prototype, des sessions d'analyse de besoins et d'acquisition de connaissances ont été menées auprès des membres du centre de commandement et de contrôle des forces de l'air Canadienne.

Dans une première collaboration (contrat W7701-6-1580) entre des chercheurs du CRDV et ceux du CRAEDO (*Centre de recherche pour l'aide à l'évaluation et à la décision dans les organisations*), les facteurs et sous-facteurs de la première version du CESA ont été analysés et reformulés en 14 critères; des recommandations ont été formulées à ce sujet. Un rapport faisant état de ces résultats et recommandations a été déjà déposé auprès des autorités scientifiques du CRDV

Le projet actuel s'inscrit dans la lignée de ces recommandations et constitue un nouveau cadre de collaboration entre les chercheurs des deux centres. Les objectifs fixés dans le cadre de ce projet sont articulés comme suit :

1. Chercher à valider la famille des critères définis pour le CESA suite à l'étude menée dans le cadre du premier projet;
2. Proposer l'opérationnalisation de ces critères;
3. Développer une procédure visuelle et textuelle qui facilitera la compréhension et l'analyse des résultats obtenus par CESA.

Spécifiquement, le mandat du présent projet a été décomposé selon quatre tâches[1]:

- **Tâche I. validation de la famille de critères proposée pour CESA :** l'entrepreneur devra valider la reformulation de la famille de critères proposée pour le CESA afin de vérifier si cette famille rencontre les exigences d'exhaustivité, de cohésion, et de non redondance. Il devra aussi procéder au calibrage des critères et des échelles de mesure. L'entrepreneur devra prévoir un voyage à Winnipeg au "Air Operations Center" dans le cadre de cette activité.
- **Tâche II. Opérationnalisation de la famille de critères :** l'entrepreneur devra suivre une démarche d'opérationnalisation de la famille de critères (mise en œuvre et étalonnage des critères) et ce en cherchant à répondre à l'ensemble des questions relatives à la nature des critères (*quasi, pseudo, pré*), de leurs échelles de mesure (ordinale, cardinale) et de leur mode d'évaluation (nombre flou, distribution de probabilité, linguistique, intervalle, etc.).
- **Tâche III. Définition d'une procédure d'analyse des résultats de l'évaluation multicritère :** l'entrepreneur devra définir des procédures textuelle et visuelle d'explication, d'interprétation, et d'analyse des résultats obtenus par l'algorithme d'évaluation multicritère proposé dans le cadre du premier projet. Les explications devront permettre à l'usager de comprendre les raisons pour lesquelles une action est dominée ou est dominante.
- **Tâche IV. Recommandations :** l'entrepreneur devra proposer des avenues de recherches pour améliorer le système actuel.

Afin de faciliter la lecture de ce rapport, nous avons choisi de commencer à la section suivante par une description de la situation décisionnelle et un rappel de l'essentiel de la reformulation des facteurs et des sous-facteurs en une famille de critères. Ensuite, nous faisons état des recommandations formulées dans le cadre du projet W7701-6-1580. À la section 1.3, nous décrivons le processus de validation, étape nécessaire pour l'adoption de ces critères par les acteurs. Enfin, à la section 1.4, nous présentons l'organisation de ce rapport.

[1] *Voir la description technique du projet*

1.1. Sommaire des résultats du projet W7701-6-1580

La violation de l'espace aérien canadien nécessite la mise en œuvre d'une suite d'actions afin de contrecarrer les suites d'actions et les plans de l'intrus (ennemi). Les suites d'actions sont, en général, élaborées par le personnel du Centre de Commandement (C&C) des forces de l'air. Le Commandant (ou ses représentants) valide et choisit alors la suite d'actions la plus adéquate pour une situation particulière. Ce choix repose sur un ensemble de facteurs et de sous-facteurs que nous avons cherché à reformuler en critères. La famille de critères ainsi obtenue doit être cohérente: *c'est-à-dire qu'elle doit vérifier des propriétés d'exhaustivité, de cohésion et de non redondance* (Roy, 1985 ; Roy et Bouyssou, 1993). Le lecteur est référé au rapport du premier projet précédent pour un résumé de ces exigences (Martel et al., 1997).

À partir de ces préoccupations et à la lumière de l'information dont nous disposions, nous avons proposé une famille de 14 critères afin de remplacer l'ensemble des sous-facteurs utilisés dans la version actuelle du CESA. Nous avons choisi de retenir la dénomination de facteurs afin de montrer la correspondance avec la première version du CESA. Il importe de noter que dans notre cas, les facteurs ne sont plus utilisés pour agréger les évaluations locales (sur chaque critère) mais pour représenter une dimension à considérer pour l'évaluation d'une COA. Au tableau (1.1), nous résumons ces critères, la nature de l'évaluation et le sens d'optimisation de chacun d'eux. Le nombre de 14 nous semble raisonnable pour l'évaluation des actions et pour la construction sur cette base d'un système relationnel de préférence. L'information disponible est de différentes natures. Ainsi, certains critères sont ordinaux, d'autres cardinaux; certains sont déterministes, d'autres ne le sont pas; il peut même y avoir des évaluations manquantes, etc. Par ailleurs, nous présumons que le nombre d'actions à comparer est faible (tout au plus une dizaine).

Comme nous l'avons souligné, cette reformulation est basée sur un premier effort réalisé au CRDV. En absence d'échanges avec les intervenants dans le processus de décision, nous avons considéré que cet ensemble de facteurs et de sous-facteurs (et indicateurs) reflètent les préoccupations des gens du milieu. Dans le cadre de la reformulation proposée,

nous avons cherché à respecter les caractéristiques de l'information disponible. Nous avons également proposé une procédure pour sous-agréger des évaluations ordinales en vue de construire une échelle ordinale pour des critères à conséquences multiples.

Tableau 1 : Tableau récapitulatif de la reformulation des 14 critères (avant validation)

Critère		Évaluation				Sens
		Cardinale	Ordinale	Ponctuelle	Distributionnelle	d'optimisation
Facteur flexibilité						
Couverture des tâches opérationnelles	C_1	*[0, 1]*		Déterministe		Maximiser
Couverture des localisations possibles de la mission	C_2	*[0, 1]*		Probabiliste		Maximiser
Couvertures des suites d'actions possibles de l'ennemi	C_3	*[0, 1]*		Probabiliste		Maximiser
Couvertures des «déceptions» possibles de l'ennemi	C_4	*[0, 1]*		Probabiliste		Maximiser
Facteur complexité						
Complexité des opérations	C_5		échelle à 5 niveaux	Déterministe		Minimiser
Complexité logistique	C_6		Échelle à 5 niveaux	Déterministe		Minimiser
Complexité de commandement et de contrôle	C_7		Échelle à 5 niveaux		Déterministe	Minimiser
Facteur accomplissement						
Capacité d'accomplissement	C_8	*[0, 1]*		Probabiliste		Maximiser
Facteur utilisation optimale des ressources						
Coûts variable en $	C_9	$\mathfrak{R}^+$		Déterministe		Minimiser
Facteur du risque						
Risque de mauvais timing	C_{10}		échelle à 5 niveaux		Probabiliste	Minimiser
Risque d'écarts de couverture	C_{11}		échelle à 5 niveaux		Probabiliste	Minimiser
Risque de perte possible de personnes	C_{12}		échelle à 5 niveaux	flou		Minimiser
Risque de perte d'équipements à cause de l'armement de l'ennemi	C_{13}		échelle à 5 niveaux	flou		Minimiser
La non-fiabilité	C_{14}	*[0, 1]*		Probabiliste		Minimiser

Rappelons que cette famille de critères a suscité quelques remarques:

1. Les différents critères proposés sont de natures diverses. Nous avons proposé de les traiter comme des pseudo-critères en leur associant des seuils d'indifférence et de préférence stricte. On a proposé également d'introduire, lorsqu'il y aura lieu, des seuils de veto;

2. La validation de cette famille de critères directement auprès des intervenants du processus de décision n'a pas été réalisée. Donc, il était impossible d'affirmer que la famille de critères respectent les exigences de cohérence.

Par ailleurs, il était aussi naturel de se demander quelle procédure d'agrégation multicritère devrait-on choisir pour traiter les évaluations obtenues par le biais de ces critères? Rappelons qu'en général, le processus de décision dans un contexte de violation de l'espace aérien nécessite qu'une décision soit prise dans des délais de temps très courts, ce sont donc des décisions urgentes, avec des enjeux importants [(sécurité du pays, possibilité de pertes de vies, etc.) face au risque]. Cette situation ne donne pas l'occasion pour des interactions entre le(s) décideur(s) (Commandant) et le personnel. La chaîne de décisions est hiérarchiquement bien établie. Le Commandant est celui qui prend la décision finale et le personnel doit en principe la mettre en œuvre. De plus, la problématique de décision retenue par les gens du CRDV est celle du rangement; c'est-à-dire que la recommandation présentée au Commandant prendra la forme d'un classement des actions de la meilleure à la moins bonne avec éventuellement des *ex aequo*.

À partir des PAMC présentées dans la littérature sur l'aide multicritère à la décision[2], il était difficile de recommander une procédure en particulier qui soit parfaitement adaptée au cas auquel nous faisons face. C'est ainsi que nous avons choisi de proposer la procédure PAMSSEM (*Procédure d'Agrégation Multicritère de type Surclassement de Synthèse pour Évaluations Mixtes*), développée dans le cadre du projet VOLVOX et servant de base au logiciel Decision Grid. Cette procédure s'inscrit dans le cadre de l'approche du surclassement de synthèse, et s'inspire largement de la procédure ELECTRE III (Roy et Bouyssou, 1993) pour la construction des relations de surclassement et de la procédure PROMETHEE I et II (Brans et Vincke, 1985 ; Brans et *al.*, 1984) pour l'exploitation de ces relations. Elle s'inspire également des développements proposés dans Martel et D'Avignon (1982). Elle propose aussi que les critères conduisant à des évaluations floues soient traités comme dans Munda (1995).

[2] *Nous avons présenté une trentaine de PAMC dans le cadre du rapport final du projet W7701-6-1580.*

Par ailleurs, nous avons prévu que la procédure pouvait traiter le cas des données manquantes. Toutefois, nous avons fait une mise en garde à l'effet que ce traitement devait se faire avec prudence; par exemple, il fallait identifier les facteurs ou les critères pour lesquels une telle situation serait admissible. On a distingué deux raisons pour lesquelles une évaluation au niveau d'un critère peut être manquante qui sont : un critère ne s'applique pas à une action particulière, ou encore l'évaluation est non disponible (difficile à obtenir, etc.). Dans le premier cas, nous avons proposé de faire un traitement qui ne défavorise ni ne favorise l'action concernée. L'action est considérée comme au moins aussi bonne que l'action à laquelle elle est comparée, quelque soit l'action comparée. Cependant, dans le cas où l'évaluation serait difficile à obtenir, nous avons proposé de la remplacer par la distribution (discrète) composée de l'ensemble des évaluations obtenues par les autres actions sur ce critère. On est ainsi conduit, dans la comparaison par paire, à comparer une action avec une évaluation distributionnelle (celle remplaçant l'évaluation manquante) à une action avec une évaluation ponctuelle (cas dégénéré d'une évaluation distributionnelle). Ceci est valable dans les situations d'évaluations ponctuelles cardinales uniquement.

1.2. Recommandations du projet W7701-6-1580

La première recommandation de ce projet a été que les critères devraient faire l'objet d'une validation plus complète auprès des gens du milieu pour vérifier si la famille de critères rencontre les conditions de cohérence. Nous avons soutenu que cette étape devrait être la suite immédiate à ce projet. Ainsi, il sera possible que la formulation de certains critères soit modifiée de façon à intégrer tous les aspects jugés pertinents par les officiers.

Par ailleurs, une fois cette validation réalisée, il est nécessaire de proposer une démarche opérationnelle pour l'obtention des évaluations sur les différents critères. Cette démarche englobe la détermination de la nature des critères, les sources de l'information, le choix de fonction d'appartenance pour les critères de nature floue, la fixation des différents seuils, etc. Cette opérationnalisation des critères nécessite qu'ils soient bien compris des utilisateurs (décideurs) et que les seuils de discrimination soient fixés avec grand soin.

À cause du contexte décisionnel spécifique et de la nature (mixte) de l'information issue des critères construits, nous avons proposé une procédure d'agrégation multicritère (PAMC) appropriée au contexte de décision. Cette PAMC pourra être implantée sur un support informatique convivial. Toutefois, dans un contexte de décision face au risque, nous croyons qu'il est nécessaire de proposer une analyse de sensibilité. Cette analyse pourrait éventuellement être incorporée à un outil de visualisation. Cet outil visuel peut aider à mieux saisir les significations des rangements obtenus et le rôle de chaque paramètre du modèle. De plus, c'est un outil qui est susceptible de rendre la PAMC plus transparente pour l'utilisateur et faciliter le processus d'aide à la décision. Ainsi, le Commandant aura la possibilité de faire varier certains paramètres afin de mesurer la sensibilité du résultat.

Comme nous l'avons souligné, le choix des coefficients d'importance n'est pas trivial. À cet égard, nous suggérons d'intégrer au CESA une procédure permettant de fixer ces coefficients d'importance relative.

1.3. Processus de validation de la famille de critères proposée pour le CESA

Comme nous l'avons souligné à plusieurs reprises, la validation des critères auprès des décideurs est l'étape la plus importante afin que ces derniers acceptent d'adopter l'outil d'aide à la décision. Dans le cadre de ce nouveau projet, nous considérons que nous avons cheminé dans la réalisation de cette validation, sans pour autant avoir eu l'occasion d'accéder aux militaires impliqués dans le processus de décision. Dans un premier temps, suite à des commentaires des gens du CRDV, nous avons revu les critères afin de les présenter à des personnes proches des militaires en question. C'est ainsi que nous avons été conduit à rencontrer M. C. Hunter et le Major J. C. Beaupré, le 9 et 10 décembre 1997. Durant ces deux journées, nous avons été amenés à réviser les critères, à les reformuler, à définir de nouveaux critères, à éliminer certains et à fusionner certains autres. Par la suite, avec l'aide de Mmes M. Bélanger et I. Abi-Zeid, nous avons présenté un document à M. Hunter et au Major Beaupré dans lequel nous avons proposé une famille de critères modifiés. Pour chaque critère, nous avons identifié ses indicateurs, les questions qui seraient posées à l'opérateur, la manière de synthétiser les réponses de l'opérateur pour obtenir l'évaluation de chaque COA sur ce critère.

Nous avons, dans certains cas, posé des questions précises à M. Hunter et au Major Beaupré pour lever certaines difficultés d'interprétation ou de compréhension du processus de décision dans un contexte de violation de l'espace aérien canadien.

Ce processus d'interactions avec Mmes. Bélanger et Abi-Zeid, d'une part, et avec M. Hunter et le Major Beaupré d'autre part, a conduit à une nouvelle famille de critères que nous décrivons dans la suite de ce rapport. Il importe de rappeler que nous ne pouvons pas encore affirmer qu'il s'agit d'une famille cohérente de critères. C'est seulement les décideurs ou leurs représentants qui pourront aider à vérifier les conditions de cohérence. C'est ce qui sera fait suite à ce projet.

1.4. Organisation du document

L'organisation de ce document se présente comme suit : dans la section 2 nous présenterons la famille de critères modifiée ainsi que l'opérationnalisation des critères. La détermination des coefficients d'importance relative des critères sera présentée dans la section 3. Dans la section 4, nous proposerons les différents types d'analyse de sensibilité pouvant être implémentés dans le cadre de ce projet. Le module explicatif permettant de faciliter la compréhension des résultats de la procédure PAMSSEM et de visualiser les différentes analyses de sensibilité sera présenté dans la section 5. Enfin, dans la section 6 nous formulerons quelques conclusions et recommandations.

2. Opérationnalisation d'une famille (cohérente) de critères dans le cadre du projet CESA

Dans cette section nous allons présenter les différents critères suite à l'étape de validation. Dans cette présentation, nous donnerons, pour chaque critère, sa définition, la manière dont on évalue une COA, la détermination de ses coefficients d'importance relative (inter-critères et intra-critère (dans le second cas nous présenterons le modèle de sous-agrégation)) et enfin ses différents seuils de discrimination.

2.1. *Le facteur de flexibilité*

D'après la première reformulation le facteur flexibilité a été éclatée en quatre critères : *couverture des tâches opérationnelles identifiées* (C_1), *couverture des localisations possibles de la mission* (C_2), *couverture des suites d'actions possibles de l'ennemi* (C_3) et *couverture des « déceptions » (leurres) possibles de l'ennemi* (C_4). Après l'étape de validation, le critère (C_4) a été éliminé. Nous présentons dans ce qui suit les trois critères qui ont été retenus pour le facteur flexibilité.

2.1.1. Le critère (C_1) : couverture des tâches opérationnelles identifiées

Ce critère sert à évaluer si une action couvre les tâches opérationnelles identifiées préalablement par le personnel du C&C, lors de l'analyse de l'événement, afin de se conformer aux différents objectifs (de sécurité nationale, militaires, de mission et opérationnels). Le personnel affecte des coefficients d'importance relative à chacune des tâches identifiées. L'évaluation d'une action sur ce critère sera la somme des coefficients d'importance des tâches couvertes par l'action (voir tableau 2). L'importance de toutes les tâches pouvant être couvertes est égale à 1. Le critère C_1 sera de nature déterministe, exprimé sur une échelle cardinale et dont la valeur sera à maximiser. La formulation mathématique de l'évaluation d'une action par rapport à ce critère se présente comme suit :

$$e_{i1} = \sum_{j=1}^{T_1} \pi_{OT_j} \cdot x_{ij} \quad avec\ x_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ \mathrm{COA}_i\ couvre\ OT_j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \qquad (2.1)$$

où, T_1 est le nombre des tâches opérationnelles à couvrir, e_{i1} est l'évaluation de l'action i par rapport au critère C_1 et π_{OT_j} est l'importance relative associée à la tâche OT_j. x_{ij} peut prendre une valeur entre 0 et 1 si l'on considère qu'une tâche peut être couverte que partiellement.

Tableau 2 : Évaluation d'une COA sur C_I

description de l'événement		description de la COA		
Liste des tâches opérationnelles	Coefficients d'importance des OT	Liste des OT couvertes par la COA	assignation des x_{ij}	Performance de la COA
OT_1	π_{OT_1}	OT_1	1	
OT_2	π_{OT_2}	–	0	
.	.	OT_3	1	
.	.	–	0	Utilisation de la somme pondérée
.	.	.	.	
$OT_{(T_1-1)}$	$\pi_{OT_{(T_1-1)}}$	$OT_{(T_1-1)}$	1	
OT_{T_1}	$\pi_{OT_{T_1}}$	–	0	
	$\sum_{j=1}^{T_1} \pi_{OT_j} = 1$		$\sum_{j=1}^{T_1} x_{ij} \leq T_1$	$0 \leq e_{i1} \leq 1$

Détermination des importances relatives des tâches

Pour déterminer l'importance relative des tâches opérationnelles (π_{OT_j}), nous proposons dans un premier temps de subdiviser l'ensemble des tâches opérationnelles T_I en n sous-ensembles de tâches d'égale importance $S_1, S_2, ..., S_n$. Si le nombre de tâches est très grand, il suffirait peut-être de ne retenir que les plus importantes. Par la suite, le personnel pourrait ranger par ordre d'importance relative ces sous-ensembles (c'est-à-dire en tenant compte de l'importance relative des tâches qui composent ces sous-ensembles. En se rappelant que chacune des tâches dans un sous-ensemble à la même importance et en ne tenant pas compte du nombre de tâches dans chaque sous-ensemble)

$$S_{(1)}, S_{(2)}, ..., S_{(n)}$$

En commencent par le sous-ensemble des tâches les moins importantes $S_{(n)}$, le personnel indiquerait de combien plus importante sont les tâches qui se trouvent dans le sous-ensemble qui est juste plus important $S_{(n-1)}$, et ainsi de suite, c'est-à-dire les tâches de $S_{(n-2)}$ par rapport aux tâches $S_{(n-1)}$, etc. En posant par exemple

$$\pi'_{OT_j \in S_{(n)}} = 1 \text{ (ou 10 comme dans SMART)}$$

nous obtenons :

$$\pi'_{OT_j \in S_{(n-1)}} = k_{(n,n-1)} \pi'_{OT_j \in S_{(n)}}$$

où $k_{(n,n-1)}$ indique de combien les tâches du sous-ensemble $S_{(n-1)}$ sont plus importantes (relativement) que les tâches du sous-ensemble $S_{(n)}$. Les π_{OT_j} seront obtenus par la normalisation (somme égale à 1) des π'_{OT_j}.

Le modèle de sous-agrégation (2.1), de type somme pondérée, est compensatoire et les π_{OT_j} jouent un rôle de "trade-off". Cela ne pose pas de difficulté particulière au personnel pour déterminer les π_{OT_j} puisque les x_{ij} sont 0 ou 1, ou entre 0 et 1 si l'on considère les couvertures partielles, de sorte qu'il n'y a pas de difficulté liée aux échelles de mesure dans ce cas.

2.1.2. Le critère (C_2) : couverture des localisations possibles de la mission

Ce critère requiert l'attribution d'une probabilité à chaque localisation possible de la mission. Ces probabilités peuvent être déterminées par le personnel du C&C selon l'analyse de l'événement. L'évaluation d'une action i sur ce critère sera la somme des probabilités des localisations couvertes par l'action. Toutefois, vu qu'il sera généralement difficile de prédire toutes les localisations possibles, il serait prudent d'aviser le personnel si la somme des probabilités est inférieure à 1 (par un message de type: « on prédit les localisations à X% », où X est la somme des probabilités des localisations prédites). Ce critère conduira à une probabilité, exprimée sur une échelle cardinale et à maximiser. La formulation mathématique de l'évaluation d'une action par rapport à ce critère se présente comme suit (voir les détails dans le tableau 3) :

$$e_{i2} = \sum_{j=1}^{T_2} P(\tilde{ML} = ML_j) \cdot P(X_{ij} = 1 \mid \tilde{ML} = ML_j) = \sum_{j=1}^{T_2} p_{ML_j} \cdot p_{time_q} \qquad (2.2)$$

où
$$\begin{cases} \tilde{ML} : \textit{localisation de la mission} \\ P(\tilde{ML} = ML_j) = p_{ML_j} : \textit{c'est} \text{ la probabilité que la localisation de la mission soit } ML_j \\ P(X_{ij} = 1 \mid \tilde{ML} = ML_j) = p_{time_{ij}} : \textit{c'est} \text{ la probabilité conditionnelle pour que la } COA_i \\ \text{couvre à temps } ML_j \text{ étant donné que la localisation de la mission est } ML_j \\ X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si COAi couvre } ML_j \text{ à temps} \\ 0 & \textit{autrement} \end{cases} \\ T_2 \quad : \textit{est le nombre de localisations possibles de la mission} \\ \alpha \quad : \textit{est un indice de la localisation de la mission} \end{cases}$$

Tableau 3 : Évaluation d'une COA sur C_2

description de l'événement		Description de la COA	
Liste des localisations de la Mission	Probabilités des localisations de la Mission	Probabilités conditionnelles de couvrir à temps ML_j	Performance de la COA
ML_1	p_{ML1}	$p_{time_{i1}}$	
ML_2	p_{ML2}	$p_{time_{i2}}$	
.	.	.	
ML_{T_2}	p_{ML_j}	$p_{time_{ij}}$	*Utilisation de la probabilité marginale*
.	.	.	
ML_{T_2-1}	$p_{ML_{T_2-1}}$	$p_{time_{iT_2-1}}$	
ML_{T_2}	$p_{ML_{T_2}}$	$p_{time_{iT_2}}$	
	$\sum_{j=1}^{T_2} p_{ML_j} \leq 1$		$0 \leq e_{i2} \leq 1$

2.1.3. Le critère (C_3) : couverture des suites d'actions possibles de l'ennemi

Ce critère concerne la capacité d'une suite d'actions COA_i à s'adapter aux changements possibles d'une suite d'actions de l'ennemi $ECOA_j$ lors de son exécution. L'évaluation d'une action par rapport à ce critère est semblable à celle de C_2. La formulation mathématique de l'évaluation e_{i3} d'une action COA_i par rapport à ce critère se présente comme suit (voir les détails dans le tableau 4) :

$$e_{i3} = \sum_{j=1}^{T_3} P(\tilde{ECOA} = ECOA_j) \cdot P(X_{ij} = 1 \mid \tilde{ECOA} = ECOA_j) = \sum_{j=1}^{T_3} p_{ECOA_j} \cdot p_{cover_{ij}} \qquad (2.3)$$

où
$$\begin{cases} P(\tilde{E}COA = ECOA_j) = p_{ECOA_j} : \text{c'est la probabilité que la suite d'actions de l'ennemi soit ECOA}_j \\ P(X_{ij} = 1 / \tilde{E}COA = ECOA_j) = p_{cover_{ij}} : \text{c'est la probabilité conditionnelle} \\ \text{pour que COA}_i \text{ couvre à temps ECOA}_j \text{ étant donné que l'ennemi exécute ECAO}_j \\ X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si COA}_i \text{ couvre ECOA}_j \text{ à temps} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \\ T_3 : \text{est le nombre de } ECOA_j \text{ de l'ennemi} \\ \alpha : \text{est un indice de la localisation de la mission} \end{cases}$$

Tableau 4 : Évaluation d'une COA sur C_3

description de l'événement		description de la COA	
Liste des ECOA de l'ennemi	Probabilité de chaque $ECOA_j$ de l'ennemi	Probabilités conditionnelles pour couvrir à temps $ECOA_j$	Performance de COA_i
$ECOA_1$	p_{ECOA_1}	$p_{cover_{i1}}$	
$ECOA_2$	p_{ECOA_2}	$p_{cover_{i2}}$	
.	.	.	
$ECOA_j$	p_{ECOA_j}	$p_{cover_{ij}}$	*Utilisation de la probabilité marginale*
.	.	.	
$ECOA_{T_3-1}$	$p_{ECOA_{T_3-1}}$	$p_{cover_{iT_3-1}}$	
$ECOA_{T_3}$	$p_{ECAO_{T_3}}$	$p_{cover_{iT_3}}$	
	$\sum_{j=1}^{T_3} p_{ECOA_j} \leq 1$		$0 \leq e_{i3} \leq 1$

2.2. *Le facteur complexité*

Dans le cadre du précédent projet, le facteur complexité a été éclaté en trois sous-facteurs: *complexité des opérations, complexité logistique* et *complexité de commandement et de contrôle.* Ces trois sous-facteurs ont été retenus et reformulés en critères. Après la validation, nous avons convenu de garder la même structure pour ce facteur, il y a toutefois une modification au niveau de l'évaluation des COA_i sur ces critères.

2.2.1. Le critère (C4) : Complexité des opérations

Ce critère permet de déterminer le niveau de complexité d'une action causé par les exigences opérationnelles (exigence de mise en œuvre). Vu que l'évaluation de ce type de

complexité ne pourra se faire avec précision, nous proposons la démarche suivante (voir les détails dans le tableau 5 et figure 1):

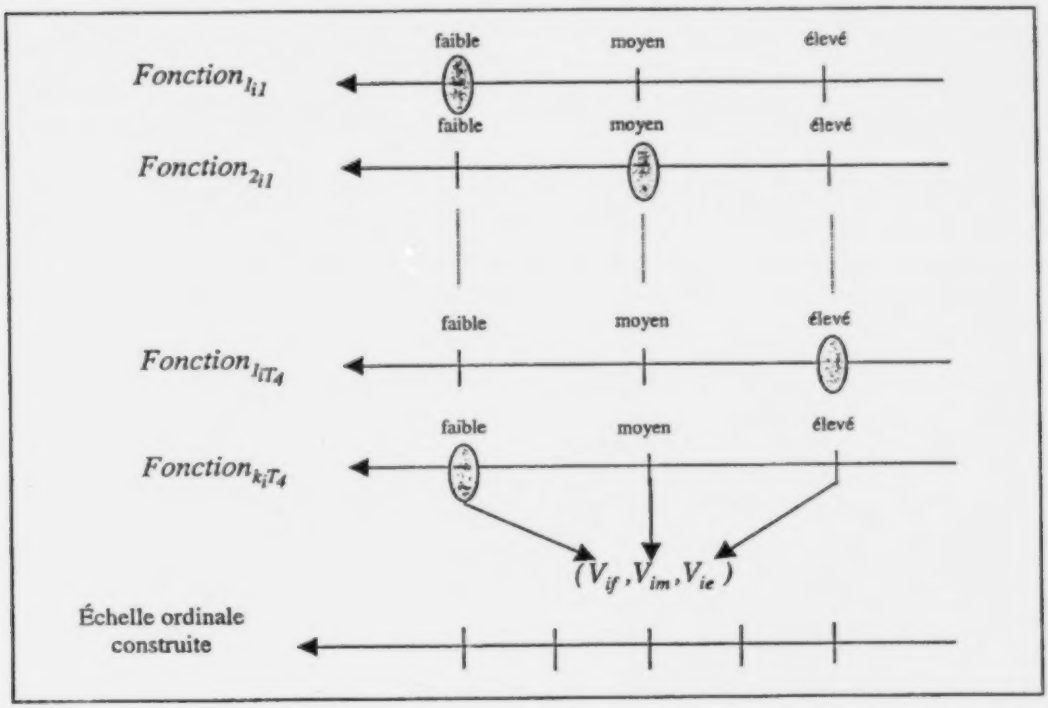


Figure 1 : Construction d'une échelle ordinale pour évaluer la complexité opérationnelle.

- Pour chaque ressource mise en œuvre pour la réalisation de l'action COA_i, le personnel doit associer une importance relative (π_{ij}) en fonction du rôle joué par cette ressource j dans la réalisation de l'action COA_i;
- Puis, on évalue la complexité (Cx) des fonctions réalisées par chaque ressource utilisée sur une échelle ordinale à 3 niveaux: « élevé », « moyen » et « faible »;

Tableau 5 : Évaluation d'une COA sur C_4

Source: description de la COA					Évaluation
Liste de ressources de la COA_i	Coefficients d'importance des ressources de la COA_i	Liste des fonctions de la ressource	Assignation du niveau de complexité à chaque fonction de la ressource	Coefficient d'importance de chaque fonction de la ressource[3]	
$Ressource_{i1}$	$\pi_{Ressource_{i1}}$	$Fonction_{l_{i1}}$	$Cx_{l_{i1}}$	$\pi_{Ressource_{i1}} / \kappa_{i1}$	*Utilisation des règles d'agrégation ordinale*
		. .	. .	. .	
		$Fonction_{\kappa_{i1}}$	$Cx_{\kappa_{i1}}$	$\pi_{Ressource_{i1}} / \kappa_{i1}$	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	
$Ressource_{ij}$	$\pi_{Ressource_{ij}}$	$Fonction_{l_{ij}}$	$Cx_{l_{ij}}$	$\pi_{Ressource_{ij}} / \kappa_{ij}$	
		. .	. .		
		$Fonction_{\kappa_{ij}}$	$Cx_{\kappa_{ij}}$	$\pi_{Ressource_{ij}} / \kappa_{ij}$	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	
$Ressource_{iT4}$	$\pi_{Ressource_{iT_4}}$	$Fonction_{l_{iT4}}$	$Cx_{l_{iT_4}}$	$\pi_{Ressource_{iT_4}} / \kappa_{iT_4}$	
		. .	. .	. .	
		$Fonction_{\kappa_{iT_4}}$	$Cx_{\kappa_{iT_4}}$	$\pi_{Ressource_{iT_4}} / \kappa_{iT_4}$	
	$\sum_{j=1}^{\tau_4} \pi_{Ressource_{ij}} = 1$		$Cx_{\kappa_{ij}}$: *ordinale à 3 niveaux*		e_{i4} *ordinale à 5 niveaux*

- Ensuite, on calcule les valeurs V_{if}, V_{im}, et V_{ie} et l'on obtient le vecteur d'évaluations (V_{if}, V_{im}, V_{ie}), à partir de l'expression (2.4).

$$\begin{cases} V_{ie} = \sum_{j=1}^{\tau_{i4}} \pi_{iK_{ij}} \cdot x_{k_{ij}} \quad avec \quad x_{k_{ij}} = \begin{cases} 1 & si \quad Cx = élevé \\ 0 & si \quad autrement \end{cases} \\ V_{im} = \sum_{j=1}^{\tau_{i4}} \pi_{iK_{ij}} \cdot x_{k_{ij}} \quad avec \quad x_{k_{ij}} = \begin{cases} 1 & si \quad Cx = moyen \\ 0 & si \quad autrement \end{cases} \\ V_{if} = \sum_{j=1}^{\tau_{i4}} \pi_{iK_{ij}} \cdot x_{k_{ij}} \quad avec \quad x_{k_{ij}} = \begin{cases} 1 & si \quad Cx = faible \\ 0 & si \quad autrement \end{cases} \end{cases} \tag{2.4}$$

[3] *On suppose que les différentes fonctions d'une ressource sont de même importance*. Cependant, il est possible de considérer des poids différents pour chaque fonction.

avec :

- $x_{ik_{ij}} = \dfrac{\pi_{ij}}{K_{ij}}$ et $\pi_{ij} = \sum_{j=1}^{K_{ij}} \pi_{ik_{ij}}$;
- V_{if} : la somme des coefficients d'importance relative associés aux items qui ont été évalués à un niveau « faible »;
- V_{im} : la somme des coefficients d'importance relative associés aux items qui ont été évalués à un niveau « moyen»;
- V_{ie} : la somme des coefficients d'importance relative associés aux items qui ont été évalués à un niveau « élevé ».
- T_{i4} : le nombre de ressources utilisées pour la réalisation de la COA_i et $\tau_{i4} = \sum_{j=1}^{T_{i4}} K_{ij}$.

Le vecteur d'évaluation (V_{if}, V_{im}, V_{ie}), ainsi obtenu, permet de construire une nouvelle échelle ordinale à 5 niveaux. Les règles de construction de cette échelle sont exprimées en (2.5). Nous admettons que ces règles sont discutables, toutefois, nous estimons que cette procédure permet de préserver la nature de l'information initiale et de respecter la nature ordinale des échelles de mesure. Il est à noter que les valeurs numériques (1 à 5) correspondent aux échelons de l'échelle ordinale et n'ont pas une signification cardinale. Il est utile de noter que la sous-agrégation à l'aide de la somme pondérée ne serait pas adéquate. La construction proposée permet d'aboutir à des évaluations ordinales qui devraient être traitées sous cette forme par la PAMC qui sera mise en œuvre.

$$\begin{cases} si \quad V_{ie} > V_{if} \quad et \begin{cases} si \quad V_{ie} > V_{im} \Rightarrow e_{ij} = 5 \\ si \quad V_{ie} \le V_{im} \Rightarrow e_{ij} = 4 \end{cases} \\ si \quad V_{ie} < V_{if} \quad et \begin{cases} si \quad V_{im} \ge V_{if} \Rightarrow e_{ij} = 2 \\ si \quad V_{im} < V_{if} \Rightarrow e_{ij} = 1 \end{cases} \\ si \quad V_{ie} = V_{if} \Rightarrow e_{ij} = 3 \end{cases} \qquad (2.5)$$

Détermination de l'importance relative des ressources

Nous proposons de déterminer les π_{ij} en suivant la procédure indiquée pour obtenir les π_{or_j} du critère C_1. Toutefois, comme ces coefficients dépendent de la COA_i qui est évaluée, le personnel devra suivre cette procédure autant de fois qu'il y a d'actions à évaluer. Eventuellement, on peut se limiter aux ressources les plus importantes si ces dernières sont en trop grand nombre.

2.2.2. Le critère (C_5) : Complexité logistique

Ce critère cherche à évaluer la complexité d'une action à cause des exigences logistiques nécessaires à sa mise en œuvre. L'évaluation d'une action sur le critère de la complexité logistique (C_5) utilise la même approche que celle utilisée pour le critère précédent (C_4). Cette évaluation se base sur l'évaluation des niveaux de complexité logistique des cinq types d'exigences suivants: *exigences de planification, exigences de ravitaillement, exigences d'atterrissage, exigences de communication et exigences associées au personnel.* Ces niveaux de complexité sont exprimés sur une échelle ordinale à trois niveaux, soient « élevée », « moyenne » et « faible ». Ainsi, après avoir affecter un niveau de complexité logistique à chacune des différentes exigences, pour une action donnée, on associe à chacune de ces exigences un coefficient d'importance relative en fonction de l'action COA_i. Ensuite, on fait la somme de ces coefficients pour chaque niveau (voir les détails dans le tableau 6). On obtient, ainsi, un vecteur d'évaluation (V_{if}, V_{im}, V_{ie}) permettant de définir une échelle à 5 niveaux selon les règles présentées en (2.5). Ce critère sera à minimiser et l'échelle associée est ordinale à 5 niveaux.

Tableau 6 : Évaluation d'une COA sur C_5

Liste des besoins logistiques	Source: description de la COA		
	Coefficients d'importance de chaque besoin de la COA_i	Assignation du niveau de complexité de chaque besoin logistique	Performance de la COA_i
Exigences de planification	$\pi_{LG_{i1}}$	$Cx_{LG_{i1}}$	*Utilisation des règles d'agrégation ordinale*
Exigences de ravitaillement	$\pi_{LG_{i2}}$	$Cx_{LG_{i2}}$	
Exigences d'atterrissage	$\pi_{LG_{i3}}$	$Cx_{LG_{i3}}$	
Exigences de communication	$\pi_{LG_{i4}}$	$Cx_{LG_{i4}}$	
Exigences associées au personnel	$\pi_{LG_{i5}}$	$Cx_{LG_{i5}}$	
	$\sum_{j=1}^{5} \pi_{LG_{ij}} = 1$	$Cx_{LG_{ij}}$: *ordinale à 3 niveaux*	e_s *ordinale à 5 niveaux*

Détermination de l'importance relative des besoins logistiques

La détermination des $\pi_{LG_{ij}}$ peut se faire en suivant une procédure analogue à celle proposée pour les π_{OT_j} (critère C_1) et pour les π_{ij} (critère C_4). Toutefois, ici le nombre de besoins logistiques n'est que de cinq, de sorte que le personnel n'aurait pas à subdiviser l'ensemble en sous-ensembles d'égale importance; cela n'empêche pas qu'il puisse jugé que certain besoins logistiques pour une COA_i spécifique, soient d'égales importances.

2.2.3. Complexité de commandement et de contrôle (C_6)

Ce critère servira à évaluer la complexité de commandement et du contrôle exercés lors de l'implantation d'une action. La performance d'une action selon le critère C_6 est déterminée par l'évaluation de deux indicateurs. Le premier indicateur (C_{rcc}), mesure les relations de C&C et, est exprimé sur une échelle ordinale à 3 niveaux (« multiple », « pair or shared » et « single »), tandis que le deuxième (C_{ec}), qui mesure les exigences de coordination, est exprimé sur une échelle ordinale à 5 niveaux (« très élevée », « élevée », « moyenne », « faible » et « très faible ») (voir figure 2). Pour évaluer une action sur ce critère, nous suggérons de procéder de la manière suivante (voir les détails dans le tableau 7) :

- le personnel note d'abord le niveau de complexité de chaque indicateur sur leur échelle respective;
- ensuite, il associe un coefficient d'importance relative à chaque indicateur (π_{rcc_i} et π_{ec_i}) en fonction de la COA_i;
- on fait correspondre les extrémités des échelles de mesure des deux indicateurs tel que montré à la figure 2;
- on effectue la somme des coefficients d'importance où il y a équivalence entre les niveaux des 2 échelles; pour ceux où il n'y a pas d'équivalence, on prend uniquement la valeur du deuxième indicateur.

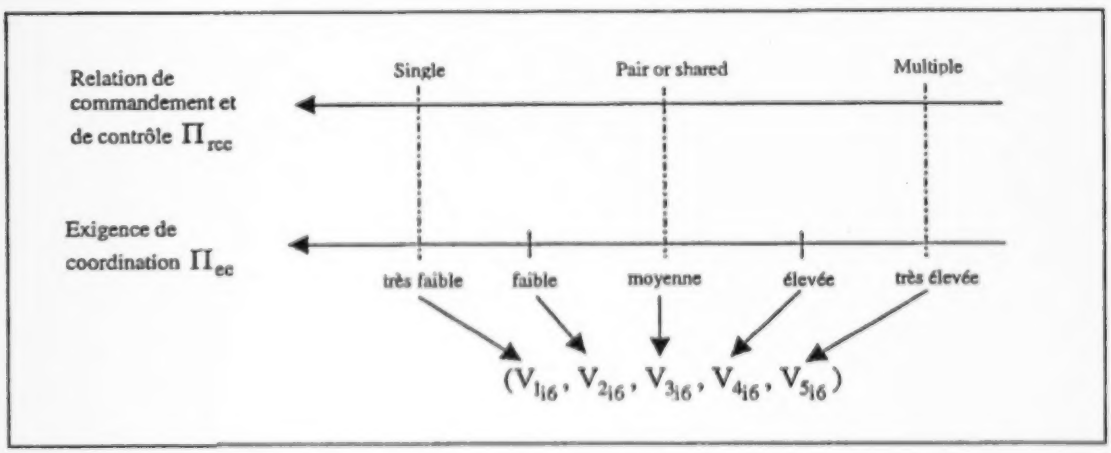


Figure 2 : Construction d'une évaluation distributionnelle pour évaluer le critère C_6.

Table 7 : Évaluation d'une COA sur C_6

Indicateurs	Source: description de la COA		
	Coefficients d'importance des indicateurs	Assignation du niveau de complexité de chaque indicateur	Performance de la COA_i
Relations de commandement et de contrôle	$\pi_{rcc_{i6}}$	$Cx_{rcc_{i6}}$	*évaluation distributionnelle*
Exigences de coordination	$\pi_{ec_{i6}}$	$Cx_{ec_{i6}}$	
	$\pi_{rcc_{i6}} + \pi_{ec_{i6}} = 1$	$Cx_{rcc_{i6}}$ & $Cx_{ec_{i6}}$ *ordinale à 3 et à 5 niveaux respectivement*	$e_{i6} = (V_{1_{i6}}, V_{2_{i6}}, V_{3_{i6}}, V_{4_{i6}}, V_{5_{i6}})$

On obtient, ainsi, un vecteur formé de 5 composantes dont la plus part (au moins trois composantes) sont nulles car il n'y a que deux indicateurs. Ce qui nous conduit à retenir une évaluation distributionnelle de la performance d'une action sur ce critère. Ce critère sera à minimiser et l'échelle associée est ordinale à 5 niveaux; l'évaluation de l'action selon ce critère sera distributionnelle. Les éléments du vecteur sont calculés comme suit :

$$V_{z_{i6}} = \Pi_{rcc_{i6}} \cdot X^{rcc}_{z_{i6}} + \Pi_{ec} \cdot X^{ec}_{z_{i6}} \quad avec \quad z = 1,2,...,5 \text{ , où} \qquad (2.6).$$

$$X^{rcc}_{1_{i6}} = \begin{cases} 1 & si \quad Cx_{rcc_{i6}} = \text{«}Single\text{»} \\ 0 & autrement \end{cases}, \quad X^{rcc}_{2_{i6}} = 0,$$

$$X^{rcc}_{3_{i6}} = \begin{cases} 1 & si \quad Cx_{rcc_{i6}} = \text{«}Pair \text{ or shared»} \\ 0 & autrement \end{cases}, \quad X^{rcc}_{4_{i6}} = 0,$$

$$X^{rcc}_{5_{i6}} = \begin{cases} 1 & si \quad Cx_{rcc_{i6}} = \text{«}Multiple\text{»} \\ 0 & autrement \end{cases} \text{ et où}$$

$$X^{ec}_{1_{i6}} = \begin{cases} 1 & si \quad Cx_{ec_{i6}} = \text{«}très \text{ faible»} \\ 0 & autrement \end{cases}, \quad X^{ec}_{2_{i6}} = \begin{cases} 1 & si \quad Cx_{ec_{i6}} = \text{«faible»} \\ 0 & autrement \end{cases},$$

$$X^{ec}_{3_{i6}} = \begin{cases} 1 & si \quad Cx_{ec_{i6}} = \text{«moyenne»} \\ 0 & autrement \end{cases}, \quad X^{ec}_{4_{i6}} = \begin{cases} 1 & si \quad Cx_{ec_{i6}} = \text{«élevée»} \\ 0 & autrement \end{cases},$$

$$X^{ec}_{5_{i6}} = \begin{cases} 1 & si \quad Cx_{ec_{i6}} = \text{«}très \text{ élevée»} \\ 0 & autrement \end{cases}$$

Détermination de l'importance relative des indicateurs

Puisqu'il n'y a que deux indicateurs de sorte, il devrait être assez facile pour le personnel de déterminer directement l'importance relative de chacun d'eux (cela pour chacune des COA_i)[4].

2.3. *Le facteur d'accomplissement (critère accomplissement : C_7)*

Un seul critère est associé au facteur accomplissement; il porte le même libellé. On cherche à évaluer la capacité d'une action à demeurer opérationnelle au moins pendant le temps requis.

[4] *En fait, on se demande si ces importances relatives ne dépendent pas tout autant des événements.*

Après l'étape de validation, l'évaluation de la performance d'une action i selon le critère (C_7) s'effectue de la manière suivante :

$$e_{i7} = \begin{cases} 0 & si \quad T_{on-station_i} < T_{required} \\ \dfrac{T_{on-station_i}}{T_{required} + T_{additional}} & autrement \end{cases} \tag{2.7}$$

où, $T_{on-station_i}$ est le temps d'opération disponible selon la COA_i (évaluation faite par le personnel), $T_{required}$ et $T_{additional}$ sont respectivement les temps requis et additionnel selon l'analyse de l'événement. L'échelle associée à ce critère est de nature cardinale prenant des valeurs dans $\Re^+$ et il s'agit d'un critère à maximiser.

2.4. *Le facteur d'utilisation optimale des ressources (critère C_8)*

À l'instar du facteur précédent, le facteur utilisation optimale des ressources est représenté par un seul critère. Après validation, ce critère n'a pas été changé. Rappelons que ce critère mesure les coûts variables engendrés par une action; coûts qui ne seraient pas encourus autrement. Il est courant que les pilotes fassent des entraînements et des heures de pilotage pour améliorer leurs aptitudes et garder leur permis de vol. Ainsi, la participation de certains pilotes et l'utilisation des ressources pour une intervention particulière ne pourraient être comptabilisés directement. Il ne faudrait pas tenir compte des coûts qui seraient de toute façon encourus par exemple pour l'entraînement des pilotes. Il serait possible de ne pas tenir compte des coûts fixes qui sont engagés indépendamment de toute action.

L'évaluation d'une action selon ce critère est exprimée par la somme des coûts variables associés à l'utilisation de ressources pour la réalisation de l'action et qui ne seraient pas encourus autrement. Ce critère sera à minimiser et l'échelle associée est de niveau cardinal prenant des valeurs dans $\Re^+$; elle s'écrit:

$$e_{i8} = \sum_{\ell=1}^{L_i} C_\ell \tag{2.8}$$

où L_i est nombre total de ressources utilisées pour la réalisation de COA_i et auxquelles sont associés des coûts.

2.5. *Le facteur risque*

Ce facteur représente la possibilité d'échec de la mission à cause de perte d'équipements ou de personnes. En effet, après une première reformulation, le facteur risque a été décomposé en 5 sous-facteurs à partir desquels seraient évalués toutes les actions. Après l'étape de validation, nous avons retenu 6 critères dont 3 appartenaient à la première reformulation : *impact des écarts de couverture (C_9), risque de perte en personnel militaire (C_{10}) et la fiabilité des équipements (C_{13})* et 3 sont de nouveaux critères : *risque de dommage collatéral (C_{11}), risque de confrontation (C_{12})* et *efficacité du personnel impliqué dans l'action (C_{14})*. Dans ce qui suit, nous développons les 6 critères rattachés à ce facteur.

2.5.1. Le critère (C_9) : impact des écarts de couverture

On cherche à évaluer le risque d'échec de la mission à cause des écarts de couverture radio et radar. La performance d'une option selon ce critère se base sur l'évaluation des niveaux d'impact des deux écarts radio et radar. Ces impacts sont exprimés sur une échelle ordinale à 3 niveaux (« grand impact », «impact moyen» et «impact faible») et ils seront à minimiser. La procédure d'évaluation d'une action sur ce critère est la suivante (voir tableau 8):

- le personnel associe un coefficient d'importance relative à chacune des deux sources d'écart;
- on fait la somme des coefficients d'importance où il y a équivalence d'évaluation d'impact entre les niveaux des deux échelles permettant de recevoir ces évaluations;
- on obtient alors un vecteur d'évaluations à trois composantes : (V_1, V_2, V_3).

Tableau 8 : Évaluation d'une COA sur C_9

		Source: description de la COA	
Type d'écart	Coefficients d'importance de chaque type d'écart de couverture	Assignation de l'impact de chaque écart de couverture	Performance de la COA
Impact Radar	$\pi_{radar_{i9}}$	$Impact_{radar,i}$	*évaluation distributionnelle*
Impact Radio	$\pi_{radio_{i9}}$	$Impact_{radio,i}$	
	$\pi_{radar_{i9}} + \pi_{radio_{i9}} = 1$	*évaluation ordinale à 3 niveaux*	$e_{i9} = (V_{1_{i9}}, V_{2_{i9}}, V_{3_{i9}})$

avec V_1 est la somme des coefficients d'importance associés au niveau « impact faible »; V_2 est la somme des coefficients d'importance associés au niveau «impact moyen »; V_3 est la somme des coefficients d'importance associés au niveau «impact élevé»; e_{i9} est l'évaluation de l'action *i* selon le *critère impact des écarts de couverture* (C_9).

Le vecteur performance constitue une évaluation distributionnelle sur une échelle ordinale à 3 niveaux pour les mêmes raisons que celles évoquées dans le cas du critère C_6, c'est-à-dire qu'au plus deux composantes du vecteur sont non nulles. Ce critère sera à minimiser.

Détermination de l'importance relative des types d'écart

Tout comme pour le critère C_7, il n'y a que deux éléments pour lesquels il faut déterminer l'importance relative. Le personnel devrait y parvenir sans trop de peine, mais il est possible de lui offrir un outil visuel.

2.5.2. Le critère (C_{10}) : Perte en personnel militaire

C'est la vraisemblance d'une perte en personnel militaire (PPM) lors de la mission effectuée par la COA_i qui est évaluée. Pour chaque COA_i, le personnel évalue la vraisemblance conditionnelle d'une perte de personnel militaire sur une échelle ordinale à 5 niveaux ($Niveau_1$ = très très peu vraisemblable, $Niveau_2$ = très peu vraisemblable, $Niveau_3$ = peu vraisemblable, $Niveau_4$ = vraisemblable, $Niveau_5$ = très vraisemblable) étant donné que l'ennemi exécute $ECOA_j$, j =1,2,...,T_3 ($V_{zj}(PPM / ECOA_j)$). L'évaluation e_{i10} d'une COA_i selon ce critère est obtenue par une sous-agrégation permettant de construire une échelle ordinale à 7 niveaux (voir figure 3) dont les étapes se présentent comme suit. On calcul tout d'abord le vecteur d'évaluation ($V_{1_{i10}}, V_{2_{i10}}, V_{3_{i10}}, V_{4_{i10}}, V_{5_{i10}}$) selon la règle suivante (voir tableau 9) :

$$V_{z_{i10}} = \sum_{j=1}^{T_3} X_{ji}^{z} . P_{ECOA_j}, \quad z = 1,2,...5 \tag{2.9}$$

$$X^{z}_{ji10} = \begin{cases} 1 & si \quad V_{zi}(PPM / ECOA_j) = Niveau_z \\ 0 & autrement \end{cases}; \quad z = 1,2,3,4,5$$

où p_{ECOAj} est la probabilité que l'ennemi exécute $ECOA_j$ (évaluée au critère C_3).

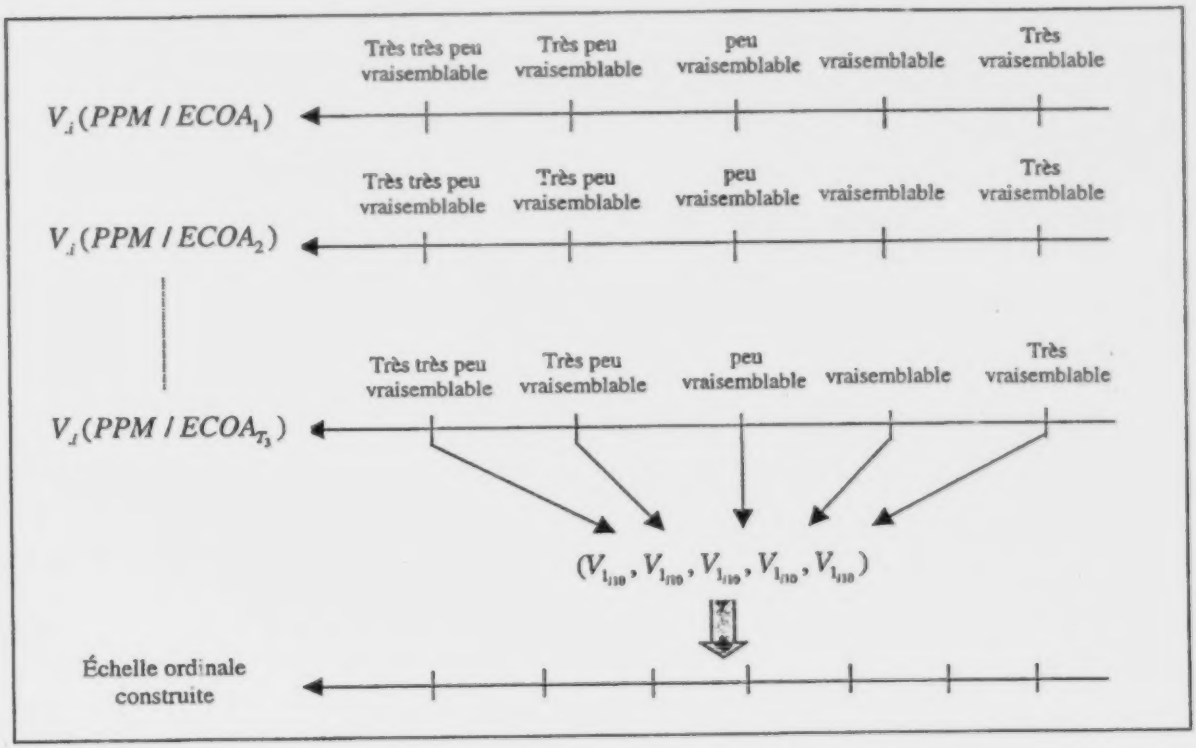


Figure 3 : *Construction d'une échelle ordinale pour évaluer le risque de perte en personnel militaires.*

Tableau 9 : Évaluation d'une COA sur C_{10}

description de l'événement		description de la COA	
Liste des ECOA de l'ennemi	Probabilité de chaque $ECOA_j$ de l'ennemi	Vraisemblance conditionnelle d'une perte de personnel	Performance de *COA*
$ECOA_1$	p_{ECOA_1}	$V_{zi}(PPM / ECOA_1)$	
$ECOA_2$	p_{ECOA_2}	.	
.	.	.	
$ECOA_j$	p_{ECOA_j}	$V_{zi}(PPM / ECOA_j)$	*Utilisation des règles d'agrégation ordinale*
.	.	.	
$ECOA_{T_3-1}$	$p_{ECOA_{T_3-1}}$	.	
$ECOA_{T_3}$	$p_{ECOA_{T_3}}$	$V_{zi}(PPM / ECOA_{T_3})$	
	$\sum_{j=1}^{T_3} p_{ECOA_j} \leq 1$	*Échelle à 5 niveaux*	e_{i10} *ordinale à 7 niveaux*

En utilisant ensuite le même type de règles que celles utilisées pour les critères C_4 et C_5, on obtient, cette fois-ci, une échelle ordinale à sept (7) niveaux dont les règles de construction sont données par les expressions (2.10) à (2.18). Ce critère sera à minimiser et l'évaluation sera ponctuelle.

$$\text{Si} \begin{cases} V_{3_{i10}} > (V_{1_{i10}} + V_{2_{i10}}) \\ \text{et} \\ V_{3_{i10}} > (V_{4_{i10}} + V_{5_{i10}}) \end{cases} \Rightarrow 3, 4 \text{ ou } 5 \tag{2.10}$$

$$\text{Si (2.10) et} \begin{cases} \text{si } (V_{1_{i10}} + V_{2_{i10}} > V_{4_{i10}} + V_{5_{i10}}) \Rightarrow 3 \\ \text{si } (V_{1_{i10}} + V_{2_{i10}} = V_{4_{i10}} + V_{5_{i10}}) \Rightarrow 4 \\ \text{si } (V_{1_{i10}} + V_{2_{i10}} < V_{4_{i10}} + V_{5_{i10}}) \Rightarrow 5 \end{cases} \tag{2.11}$$

sinon, on vérifie les autres conditions.

$$\text{Si } (V_{1_{i10}} + V_{2i10} > V_{4_{i10}} + V_{5_{i10}}) \text{ et si } (V_{1_{i10}} > V_{3_{i10}}) et \begin{cases} \text{si } (V_{1_{i10}} > V_{2_{i10}} + V_{3_{i10}}) \Rightarrow 1 \\ \text{si } (V_{1_{i10}} \leq V_{2_{i10}} + V_{3_{i10}}) \Rightarrow 2 \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\text{Si } (V_1 + V_2 > V_4 + V_5) \text{ et si } (V_1 = V_3) et \begin{cases} \text{si } (V_2 > V_3) \Rightarrow 2 \\ \text{si } (V_2 \leq V_3) \Rightarrow 3 \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\text{Si}\left(V_{1_{i10}}+V_{2_{i10}}>V_{4_{i10}}+V_{5_{i10}}\right)\text{et si}\left(V_{1_{i10}}<V_{3_{i10}}\right)et\begin{cases}\text{si}\left(V_{1_{i10}}+V_{2_{i10}}\geq V_{3_{i10}}\right)\Rightarrow 3\\ \text{si}\left(V_{1_{i10}}+V_{2_{i10}}<V_{3_{i10}}\right)\Rightarrow 4\end{cases} \quad (2.14)$$

$$\text{Si}\left(V_{1_{i10}}+V_{2_{i10}}=V_{4_{i10}}+V_{5_{i10}}\right)et\begin{cases}\text{si}\left(V_{1_{i10}}>V_{5_{i10}}\right)\Rightarrow 3\\ \text{si}\left(V_{1_{i10}}=V_{5_{i10}}\right)\Rightarrow 4\\ \text{si}\left(V_{1_{i10}}<V_{5_{i10}}\right)\Rightarrow 5\end{cases} \quad (2.15)$$

$$\text{Si}\left(V_{1_{i10}}+V_{2_{i10}}<V_{4_{i10}}+V_{5_{i10}}\right)\text{et si}\left(V_{3_{i10}}>V_{5_{i10}}\right)et\begin{cases}\text{si}\left(V_{3_{i10}}\geq V_{4_{i10}}+V_{5_{i10}}\right)\Rightarrow 5\\ \text{si}\left(V_{3_{i10}}<V_{4_{i10}}+V_{5_{i10}}\right)\Rightarrow 6\end{cases} \quad (2.16)$$

$$\text{Si}\left(V_{1_{i10}}+V_{2_{i10}}<V_{4_{i10}}+V_{5_{i10}}\right)\text{et si}\left(V_{3_{i10}}=V_{5_{i10}}\right)et\begin{cases}\text{si}\left(V_{3_{i10}}>V_{4_{i10}}\right)\Rightarrow 5\\ \text{si}\left(V_{3_{i10}}\leq V_{4_{i10}}\right)\Rightarrow 6\end{cases} \quad (2.17)$$

$$\text{Si}\left(V_{1_{i10}}+V_{2_{i10}}<V_{4_{i10}}+V_{5_{i10}}\right)\text{et si}\left(V_{3_{i10}}<V_{5_{i10}}\right)et\begin{cases}\text{si}\left(V_{3_{i10}}+V_{4_{i10}}\geq V_{5_{i10}}\right)\Rightarrow 6\\ \text{si}\left(V_{3_{i10}}+V_{4_{i10}}<V_{5_{i10}}\right)\Rightarrow 7\end{cases} \quad (2.18)$$

2.5.3. Le critère (C_{11}) : Dommage collatéral

Un nouveau critère C_{11} qui a été identifié au cours de l'étape de validation concerne la possibilité de perte autres que la "cible" durant le déroulement de la COA_i qui est évaluée. Le personnel doit donc évaluer les vraisemblances conditionnelles de perte de matériel sur une échelle ordinale à 5 niveaux (1, 2, 3, 4, 5 comme pour C_{10}) étant donné que l'ennemi exécute $ECOA_j$, $j = 1,2,...T_3$ ($V_{zi}(PPM / ECOA_j)$). L'évaluation e_{i11} d'une COA_i serait obtenue comme cela est indiqué dans le tableau 9, la figure 3 et les règles 2.10 à 2.18.

2.5.4. Le critère (C_{12}) : Risque de confrontation

Un nouveau critère C_{12} qui a été identifié au cours de l'étape de validation concerne les possibilités d'échec de la mission dû à la confrontation avec l'ennemi. L'évaluation e_{i12} d'une COA_i selon C_{12} est obtenue un peu à la manière de C_4 et de C_5. Le personnel doit évaluer la probabilité conditionnelle d'échec de la mission sur une échelle à 3 niveaux ($niveau_1$: faible, $niveau_2$: moyen, $niveau_3$: élevé) et cela en tenant compte de la $ECOA_j$ que l'ennemi va exécuter ($P_{zi}(Echec / ECOA_j)$). L'évaluation e_{i12} sera obtenue de la manière suivante :

1. On détermine le vecteur d'évaluation $(V_{1i12}, V_{2i12}, V_{3i12})$ où

$$V_{zi12} = \sum_{j=1}^{T_3} x_{zji12} . P_{ECOA_j}, \quad z = 1,2,3 \tag{2.19}$$

$$\text{et } x_{zji12} = \begin{cases} 1 & si \quad P_{zj}(Echec / ECOA_j) = niveau_z \\ 0 & autrement \end{cases}; \quad z = 1,2,3$$

2. On utilise les règles (2.5) pour construire une échelle à 5 niveaux.

2.5.5. Le critère (C_{13}) : Fiabilité des équipements

Pour évaluer la fiabilité d'une action, on utilise la théorie de la fiabilité. Selon la littérature concernant cette théorie (Chérard, 1995; Kaufmann, 1975), la formule généralement utilisée pour déterminer la fiabilité d'un équipement est la suivante:

$$F_s(T) = \exp\left[-\int_0^T \lambda_s(t)dt\right] \tag{2.20}$$

où $\lambda_s(t)$ est le taux de pannes instantanés de l'équipement s au temps t (distribution de pannes); T est le temps total qu'un équipement doit rester en opération; et $F_s(T)$ est la fiabilité de l'équipement s au temps T.

Il est à noter qu'il existe plusieurs formes de distributions de pannes $(\lambda_s(t))$ qui sont utilisées pour décrire la survie de différents équipements. De plus, plusieurs paramètres peuvent influencer cette fonction de distribution, comme la maintenance préventive, le nombre de réparateur, la disponibilité d'équipements de remplacement, etc. Afin de simplifier l'analyse et vu que nous ne disposons pas de données sur les distributions des taux de pannes des différents équipements et systèmes mis en œuvre par une action, nous supposons que ce taux est constant suivant un processus de Poisson homogène. Cette hypothèse est justifiée puisqu'il s'agit d'une mission ayant une durée limitée (quelques heures). De ce fait, l'expression de la fiabilité se ramène à:

$$F_s(t) = e^{-\lambda_s t} \tag{2.21}$$

Une action peut mettre en œuvre des équipements de manière successive, c'est-à-dire l'un après l'autre (cas série), en même temps (cas parallèle), avec des équipements en attente (cas « stand-by ») ou en combinant les trois possibilités (cas mixte). Ainsi, pour évaluer la fiabilité d'une action, on propose une formule de calcul différente à utiliser suivant le cas identifié, comme détaillé ci-dessous.

Cas en parallèle

Si on est dans le cas où les équipements sont utilisés en parallèle, l'évaluation de la fiabilité de l'action se ferait de la manière suivante:

$$e_{i14}=F_i(T)=1-\prod_{s=1}^{S_i}(1-F_s(T)) \tag{2.22}$$

où $F_s(t)=e^{-\lambda_s t}$, $F_i\ (t)$ est la fiabilité de l'action i après un temps d'opération t ; S_i est le nombre total d'équipements utilisés par l'action i et T est le temps d'opération d'un équipement s.

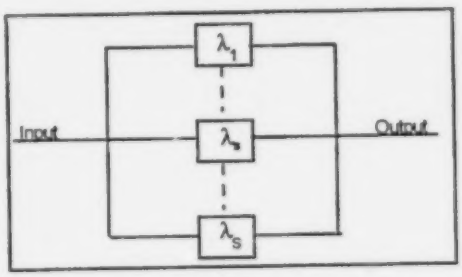


Figure 4 : Système parallèle

On doit noter que le temps total pendant lequel un équipement est en opération (T), inclut d'une manière implicite l'indicateur du sous-facteur caractéristique de l'aire des opérations « *la distance à parcourir pour atteindre une localisation* », pour cet équipement. Il s'agit d'une distance qu'on peut facilement convertir en temps; le temps où cet équipement est en opération (la durée de la confrontation avec l'ennemi avec cet équipement) et « la distance à parcourir pour retourner à la base » pour cet équipement.

Cas en série

Si on est dans le cas où les équipements sont utilisés en série, l'évaluation de la fiabilité de l'action se fait comme suit:

$$e_{i14}=F_i(T)=\prod_{s=1}^{S_i} F_s(T) \tag{2.23}$$

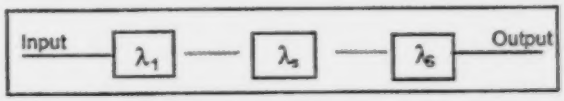


Figure 5 : Système série

Cas en « stand-by » : 2 équipements

Si on est dans le cas où deux équipements sont utilisés en « stand-by » avec respectivement des taux de pannes λ_1 et λ_2, l'évaluation de la fiabilité d'une action se calcule comme suit:

$$e_{i14}=F(T)=\left[e^{-\lambda_1 T}+\frac{{}_1e^{-\lambda_2 T}}{\lambda_1-\lambda_2}\left(1-e^{(\lambda_1-\lambda_2)T}\right)\right] \tag{2.24}$$

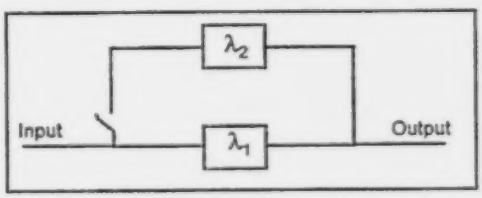


Figure 6 : Cas du stand-by

Le cas mixte

Pour évaluer la fiabilité dans un cas mixte on procède par étapes afin de se ramener à l'un des trois cas précédemment étudiés. Ce cas doit être décomposé en systèmes séries, parallèles et « stand-by ». Ainsi, il serait possible de déduire une mesure de la fiabilité globale (F) d'un tel système. À titre d'illustration, si on a une action qui utilise deux équipements en parallèle (partie 1), suivis d'un équipement seul (partie 2) et suivi de deux équipements en stand-by (partie 3), alors, on évalue d'abord la fiabilité de la partie 1 puis celle de la partie 3,

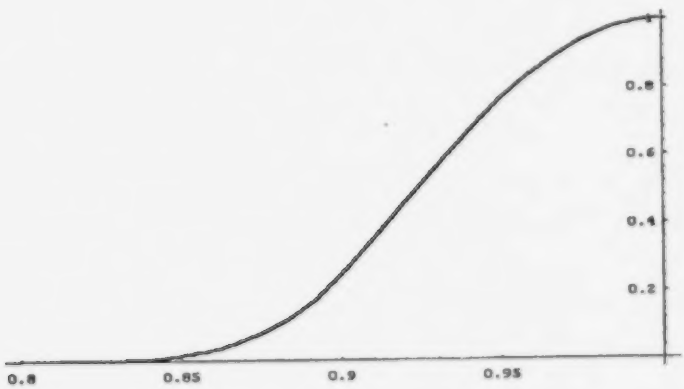
ensuite l'ensemble des trois parties étant en série on applique le cas en série pour évaluer la fiabilité de l'ensemble des trois parties et donc de l'action.

2.5.6. Le critère (C_{14}) : Efficacité du personnel impliqué dans la COA

Il s'agit d'un nouveau critère qui concerne l'efficacité du personnel qui pourrait être affecté par la fatigue, le stress, etc. Pour chaque COA_i, en tenant compte de sa complexité, l'opérateur évalue cette efficacité sur une échelle ordinale à 5 niveaux (Très hautement efficace, hautement efficace, efficace, faiblement efficace, très faiblement efficace). L'évaluation e_{i14} d 'une COA_i selon ce critère est interprétée comme un nombre flou, une variable linguistique (Munda, 1995). À ces nombres flous on associe des fonctions d'appartenances floues dont les formules mathématiques et leur représentation graphique se présentent comme suit (fonctions non-normalisées[5]) :

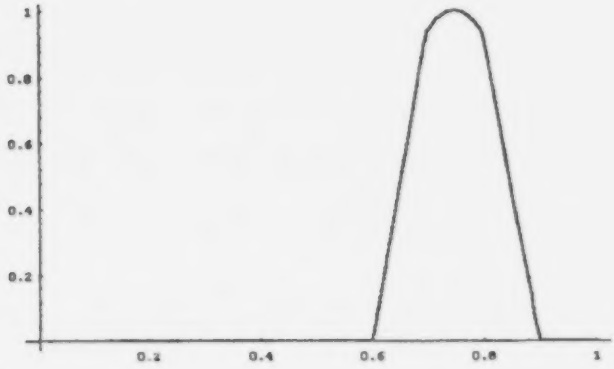
Très hautement efficace :

$$\grave{\imath}_{TH-E}(x)=\begin{cases} 4\left(\dfrac{x-0.8}{0.2}\right)^4 & 0.8 \le x < 0.9 \\ \left[1-2\left(\dfrac{1-x}{0.2}\right)^2\right]^2 & 0.9 \le x < 1 \\ 0 & sinon \end{cases} \quad \ldots \quad (2.25)$$

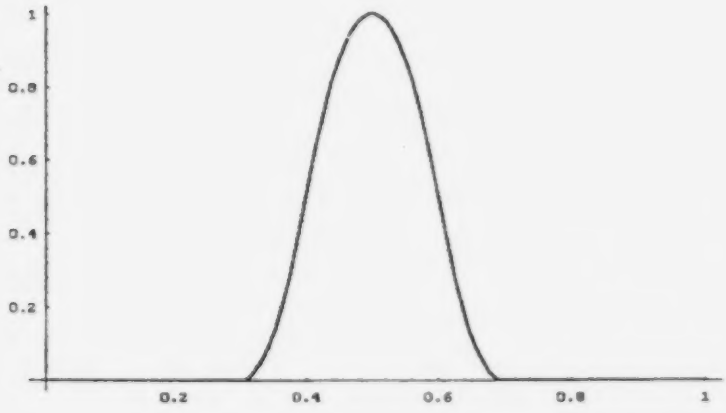


[5] *Au niveau de l'agrégation à l'aide de PAMSSEM, ces fonctions seront normalisée, c'est-à-dire que leur échelle sera modifiée afin que l'aire sous leur courbe soit égale à 1.*

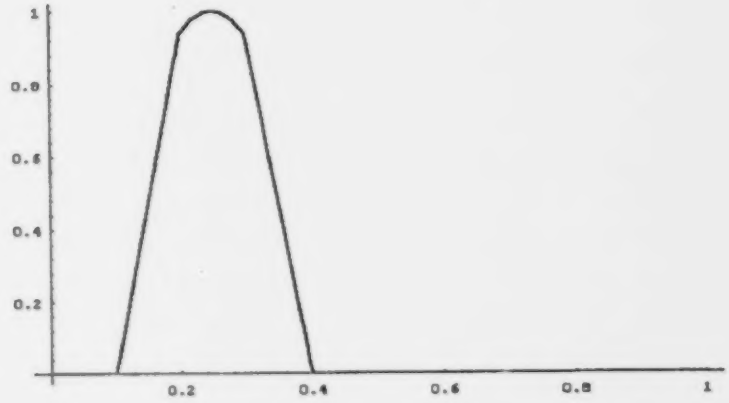
hautement efficace : $i_{T\text{-}E}(x) = \begin{cases} \sqrt{3.5\left(\frac{x-0.6}{0.2}\right)^2} & 0.6 \le x < 0.7 \\ \sqrt{1-2\left(\frac{x-0.75}{0.2}\right)^2} & 0.7 \le x < 0.8 \\ \sqrt{3.5\left(\frac{0.9-x}{0.2}\right)^2} & 0.8 \le x < 0.9 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (2.26)



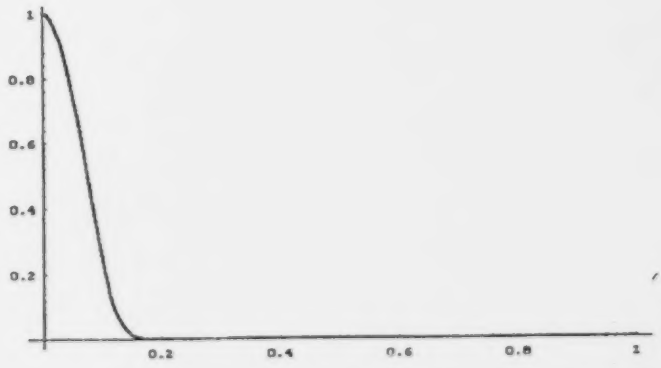
Efficace : $i_E(x) = \begin{cases} 2\left(\frac{x-0.3}{0.2}\right)^2 & 0.3 \le x < 0.4 \\ 1-2\left(\frac{x-0.5}{0.2}\right)^2 & 0.4 \le x < 0.6 \\ 2\left(\frac{0.7-x}{0.2}\right)^2 & 0.6 \le x < 0.7 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (2.27)



Faiblement efficace : $\grave{\imath}_{f-E}(x) = \begin{cases} \sqrt{3.5\left(\frac{x-0.1}{0.2}\right)^2} & 0.1 \le x < 0.2 \\ \sqrt{1-2\left(\frac{x-0.25}{0.2}\right)^2} & 0.2 \le x < 0.3 \\ \sqrt{3.5\left(\frac{0.4-x}{0.2}\right)^2} & 0.3 \le x < 0.4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (2.27)



Très faiblement efficace : $\grave{\imath}_{\eta f-E}(x) = \begin{cases} 4\left(\frac{x-0.2}{0.2}\right)^4 & 0.1 \le x < 0.2 \\ \left[1-2\left(\frac{x}{0.2}\right)^2\right]^2 & 0 \le x < 0.1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (2.28)



L'évaluation e_{i14} est donc un nombre flou sur une échelle discrète à 5 niveaux mais au niveau de l'interprétation et du traitement de cette évaluation on aura recours aux fonctions d'appartenance qui viennent d'être définies. Il s'agit d'un critère à maximiser.

2.6. *Tableau récapitulatif des critères retenus suite à l'étape de validation*

Dans le tableau 10 (page suivante) on reprend les éléments suivants : facteurs, critères, le niveau de l'échelle, la nature de l'évaluation et le sens d'optimisation. L'échelle de mesure peut être de nature cardinale ou ordinale. La nature de l'information couvre les notions de déterminisme, non-déterminisme, ponctuelle et distributionnelle (discrète ou continue). Enfin, chacun des critères a un sens spécifique d'optimisation.

Tableau 10: Tableau récapitulatif après la validation des 14 critères

Critère		Évaluation				Sens
		Cardinale	Ordinale	Ponctuelle	Distributionnelle	d'optimisation
Facteur flexibilité						
Couverture des tâches opérationnelles	C_1	*[0, 1]*		Déterministe		Maximiser
Couverture des localisations possibles de la mission	C_2	*[0, 1]*		Probabiliste		Maximiser
Couvertures des suites d'actions possibles de l'ennemi	C_3	*[0, 1]*		Probabiliste		Maximiser
Facteur complexité						
Complexité des opérations	C_4		échelle à 5 niveaux	Déterministe		Minimiser
Complexité logistique	C_5		échelle à 5 niveaux	Déterministe		Minimiser
Complexité de commandement et de contrôle	C_6		échelle à 5 niveaux		discrète	Minimiser
Facteur accomplissement						
Capacité d'accomplissement	C_7	$\mathfrak{R}$		Déterministe		Maximiser
Facteur utilisation optimale des ressources						
Coûts variables en $	C_8	$\mathfrak{R}$		Déterministe		Minimiser
Facteur risque						
Impact d'écarts de couverture	C_9		échelle à 3 niveaux		discrète	Minimiser
Perte en personnel militaire	C_{10}		échelle à 7 niveaux	déterministe		Minimiser
Dommage collatéral	C_{11}		échelle à 7 niveaux	déterministe		Minimiser
Risque de confrontation	C_{12}		échelle à 5 niveaux	déterministe		Minimiser
La fiabilité des équipements	C_{13}	*[0, 1]*		Probabiliste		Maximiser
Efficacité du personnel impliqué dans la COA	C_{14}		échelle à 5 niveaux[6]	Flou	Continue	Maximiser

3. Détermination des seuils de discrimination

Comme nous l'avons déjà mentionné, dans PAMSSEM la construction des relations de surclassement se fait un peu à la manière de ELECTRE III (Roy, 1978). Ainsi nous pouvons traiter des pseudo-critères , c'est-à-dire des critères dont le pouvoir de discrimination n'est pas absolu.

[6] *Pas nécessairement traité comme une évaluation ordinale.*

Dans la définition d'un pseudo-critère, on introduit deux seuils : un seuil d'indifférence (q) et un seuil de préférence stricte (p). De plus, dans ELECTRE III, on autorise l'incomparabilité (ou, pour une paire d'actions (a, b), on observe à la fois que non a S b et non b S a) qui résulte essentiellement de l'introduction d'un seuil de veto (v) qui est à la base du calcul des indices de discordance. Nous referons le lecteur à Bouyssou et Roy (1987) et au rapport final du projet W7701-6-1580 pour le sens et le rôle de ces divers seuils.

Plusieurs critères construits pour le CESA sont de niveau ordinal ($C_4, C_5, C_6, C_9, C_{10}, C_{11}$, et C_{12}). Strictement, pour ces critères nous ne sommes pas autorisés à calculer des différences entre les évaluations de deux actions et ainsi à rendre opérationnel (du moins de manière classique) le rôle de ces seuils. Nous ne proposons donc pas de seuil de discrimination pour ces critères même si dans PAMSSEM, ces critères ne sont pas traités comme des vrai-critères.

Pour les critères cardinaux ponctuels C_1, C_2, C_3, C_7, C_8 et C_{13}, nous proposons des valeurs par défaut qu'un utilisateur averti devrait, en connaissant le rôle dévolu à ces seuils, valider la justesse à partir de son jugement et de ses préférences.

3.1. Méthode directe pour obtenir les valeurs des seuils

Les seuils de discrimination jouent un rôle très important au sein de la procédure de surclassement proposée. En effet, c'est en grande partie grâce à ces seuils que les méthodes de surclassement offrent des raffinements qui leur permettent d'éliminer certains défauts (compensation totale par exemple) des méthodes basée sur l'approche du critère unique de synthèse (comme la somme pondérée). Toutefois, il faut reconnaître que ces seuils ne sont pas toujours facile à déterminer malgré le fait qu'ils s'appliquent à l'échelle (naturelle) associée à chaque critère et qu'ils comportent un degré de subjectivité parfois assez élevé. Ces seuils tentent de tenir compte de l'imprécision/incertitude associées aux évaluations des actions selon chacun des critères et de la sensibilité du « décideur » aux écarts d'évaluations sur les critères (Rogers et Bruen, 1998) ; c'est ainsi que l'on peut prétendre que ces seuils servent à modéliser les imperfections de l'information et les préférences du « décideur ».

Les valeurs de ces seuils peuvent (doivent) être obtenues auprès du « décideur », mais en général avec l'aide d'un conseiller, du moins pour juger de l'importance de l'incertitude/imprécision associées aux évaluations de performance. Le conseiller peut également aider le « décideur » à réfléchir sur la sensibilité de ses préférences aux écarts d'évaluation ; c'est d'ailleurs principalement ce deuxième aspect qui est à l'origine du fait que les valeurs des seuils sur un critère pouvant être variables avec la position des évaluations sur l'échelle du critère. La détermination de la première composante de ces seuils, si l'on peut s'exprimer ainsi, relève principalement du conseiller (spécialiste) qui procède aux évaluations de performance des actions, puisque c'est lui qui est le plus susceptible de maîtriser le niveau d'imprécision/incertitude de ces évaluations.

Quoiqu'il en soit, il faut que le « décideur » aussi bien que le conseiller ait en tête la définition et le rôle que joue ces seuils (Bouyssou et Roy, 1987) dans la méthode multicritère mise en œuvre. La valeur du seuil d'indifférence q_j correspond à la plus grande différence entre la plus grande évaluations de deux actions sur le critère j telle que le « décideur » puisse encore conclure, en tenant compte de l'imprécision/incertitude de l'information et de sa sensibilité aux écarts, que les deux actions soient aussi bonnes l'une que l'autre ; en supposant que les évaluations de ces deux actions sont équivalentes sur tous les autres critères. Pour déterminer directement cette valeur q_j, nous pourrions, une fois établi l'ordre de grandeur de l'imprécision/incertitude des évaluations sur ce critère (éventuellement à partir de simulation comme cela est proposé par Rogers and Bruen (1998b) pour un critère relié à l'impact du bruit), proposer au « décideur » une valeur relativement grande que nous réduirions progressivement jusqu'à ce qu'il juge qu'il est indifférent entre deux actions ayant une différence d'évaluations de cet ordre de grandeur.

La valeur du seuil de préférence stricte p_j correspond à la plus petite différence d'évaluation favorisant une action « a » par rapport à une action « b » sur le critère j telle que le « décideur » puisse conclure avec conviction, en tenant compte de l'imprécision de l'information et de sa sensibilité ; que l'action « a » est strictement préférée à « b » ; en

supposant que les évaluations de ces deux actions sont équivalentes sur les autres critères. Pour déterminer directement la valeur de p_j, nous pourrions proposer au décideur une valeur plus grande que q_j que nous augmenterions progressivement jusqu'à ce qu'il déclare (sans hésitation) que l'action ayant la meilleure évaluation est strictement préféré par rapport à l'autre. Selon Roy, Present et Silhol (1986) la valeur de p_j doit être substantiellement plus grande que celle de q_j (deux fois ou plus). Selon Maystre, Pictet et Simos (1994) les valeurs de ces deux seuils sont le reflet uniquement des marges d'incertitude et d'erreurs liées aux calculs (évaluations) effectués.

La valeur du seuil de veto v_j correspond à la plus petite différence d'évaluation favorisant l'action « b » par rapport à l'action « a » sur le critère j telle que « décideur » ne puisse conclure, en tenant compte de sa sensibilité et de l'importance relative du critère j, que, globalement « a » surclasse « b » même si l'action « a » est au moins aussi bien évaluée (et même parfois beaucoup mieux évaluée) que l'action « b » sur tous les autres critères. Pour déterminer directement la valeur de v_j, nous pourrions proposer au « décideur » une valeur plus grande que p_j (exceptionnellement v_j pourrait être égale à p_j si l'on est par exemple en présence d'un critère dictateur ; c'est-à-dire un critère dont l'importance relative normalisée est égale à 1), que nous augmenterions progressivement jusqu'à ce qu'il déclare que cette différence d'évaluation en faveur de l'action « b » par rapport à l'action « a » sur ce critère j ne peut être compensée par de bonnes évaluations de « a » par rapport à « b » sur les autres critères. Ainsi dans cette situation, il n'est plus (pas) en mesure de conclure que « a » surclasse « b » même si les évaluations sur les autres critères favorisent nettement l'action « a ». La valeur de v_j est souvent trois fois plus importante que celle de p_j (Rogers et Bruen, 1998b). Parfois, pour certain critère, le « décideur » peut juger qu'il n'y a pas de veto.

La difficulté rencontrée dans la détermination des valeurs de ces seuils constitue parfois un frein pour l'usage du concept de pseudo-critère. Compte tenu du niveau de

subjectivité entourant la détermination des valeurs pour ces seuils, il est recommandé d'effectuer une analyse de sensibilité.

3.2. Valeur par défaut pour les seuils de discrimination et de veto

On constate que les usagers rencontrent des difficultés à saisir la signification exacte des différents seuils et qu'ils sont ainsi portés à les ignorer. Nous proposons donc d'offrir à l'utilisateur qui n'est pas à l'aise pour attribuer des valeurs aux différents seuils de discrimination, la possibilité de leur fixer des valeurs par défaut.

Selon nous, les valeurs des seuils de discrimination dépendent principalement de deux facteurs liés à chacun des critères[7], à savoir le niveau d'incertitude/imprécision associé aux évaluations des actions sur un critère et l'importance relative de ce critère. Comme nous disposons de l'information concernant l'importance relative des critères (π_j), il suffit donc d'interroger l'utilisateur quant au niveau d'incertitude/imprécision que contiennent les évaluations de performance e_{ij} des actions i en regard de chacun des critères j. Le conseiller serait donc appelé à évaluer le niveau d'incertitude/imprécision (I_j) pour chacun des critères j pour lesquels des valeurs par défaut pour les seuils doivent être établies. Nous lui proposons de se prononcer entre les trois niveaux suivants :

- Un niveau très faible d'incertitude/imprécision sur les évaluations (f);
- Un niveau moyen d'incertitude/imprécision sur les évaluations (m);
- Un niveau plutôt élevé d'incertitude/imprécision sur les évaluations (e).

Pour un critère j, on cherche à établir les seuils d'indifférence (q_j), de préférence stricte (p_j) et de veto (v_j) à partir du niveau d'incertitude/imprécision (I_j) que renferment les évaluations et son importance relative (π_j). Nous commençons par proposer une valeur pour le seuil de veto en fonction uniquement de l'importance relative du critère j, puis nous

[7] *Comme nous l'avons mentionné précédemment, les valeurs des seuils servent également à modéliser les préférences du décideur. Cette composante n'est pas prise en compte dans la détermination de ces valeurs par défaut.*

proposons une valeur pour le seuil d'indifférence en fonction uniquement du niveau d'incertitude/imprécision et enfin nous proposons une valeur pour le seuil de préférence en fonction de l'importance relative du critère j et du niveau d'incertitude/imprécision que renferment les évaluations.

Seuil de veto : (v_j)

Compte tenu de son rôle lors de la comparaison de deux actions, l'ordre de grandeur de la valeur du seuil de veto est telle que le niveau d'incertitude/imprécision que renferment les évaluations peut être négligé lors de détermination de ce seuil. La valeur par défaut du seuil de veto sera donc uniquement fonction de l'importance relative du critère. Pour ce faire, nous nous sommes inspirés de la méthode ELECTRE I (Roy, 1968). Pour construire une relation de surclassement entre deux actions, cette méthode fait intervenir un indice de discordance qui est comparé à un seuil de discordance (de veto) unique pour tous les critères. Ainsi, pour calculer l'indice de discordance, les écarts d'évaluations de deux actions a et b sur les critères discordant $(c_j(a)-c_j(b))$ sont normalisés en fonction de l'étendue (E_j) de l'échelle associée au critère c_j, ajustés pour tenir compte de l'importance relative du critère (π_j) :

$$\frac{(c_j(a)-c_j(b))\pi_j}{E_j} \tag{3.1}$$

Pour conclure au surclassement, on effectue un test de non discordance qui consiste à comparer cet indice de discordance avec un seuil Δ, qui joue le rôle d'un seuil de veto dans ELECTRE I. Nous avons convenu d'établir la valeur du seuil de veto v_j par défaut à partir de cette idée. En ramenant la valeur de ce seuil Δ dans l'échelle de mesure du critère on est conduit à :

$$\frac{(c_j(a)-c_j(b))\pi_j}{E_j} \le \Delta, \text{ donc}$$

$$c_j(a)-c_j(b) \le \frac{\Delta.E_j}{\pi_j} = v_j. \tag{3.2}$$

Des simulations avec $\Delta = 0.25$ (un ordre de grandeur qui semble raisonnable pour un tel seuil) nous ont permis de constater que, pour de faible valeur du coefficient d'importance

relative, le seuil de veto v_j était nettement trop élevé. Nous avons donc atténué un peu le rôle du coefficient d'importance relative en utilisant sa racine carrée, c'est-à-dire :

$$v_j = \frac{\Delta.E_j}{\sqrt{\pi_j}}, \text{ avec } \pi_j \geq 0.01. \qquad (3.3)$$

Cette relation entre le seuil de veto et l'importance relative respecte l'esprit de la définition proposée initialement par Roy (1978) : "le seuil de veto est une donnée volontariste dont la valeur est, en règle générale, d'autant plus petite que le poids est grand".

Seuil d'indifférence : (q_j)

Selon nous, contrairement au seuil de veto, la valeur du seuil d'indifférence ne devrait être fonction que du niveau d'incertitude/imprécision que renferment les évaluations. La valeur du seuil d'indifférence devrait croître avec le niveau d'incertitude/imprécision. De plus, par définition le seuil d'indifférence est toujours inférieur au seuil de préférence stricte et au seuil de veto. Or, comme la limite inférieur de la valeur du seuil de veto est égale à $\Delta.E_j$ lorsque $(\pi_j = 1)$[8], cette valeur devient donc une borne supérieure pour q_j. Nous proposons la fonction suivante pour déterminer la valeur du seuil d'indifférence :

$$q_j = \beta(I_j).\Delta.E_j, \text{ avec } \beta(I_j) = \begin{cases} 0.15 & si \quad (I_j) = f \\ 0.30 & si \quad (I_j) = m \\ 0.60 & si \quad (I_j) = e \end{cases}. \qquad (3.4)$$

Les valeurs prises par la fonction β sont des valeurs subjectives qui nous semblent adéquates à première vue (suite à quelques simulations) mais ils pourront éventuellement être modifiés suite à certains essais.

[8] *Ici on utilise des coefficients d'importance relative normalisés, de sorte que* $\sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1$ *et* $\pi_j \geq 0$, *n est le nombre total de critère.*

Seuil de préférence stricte : (p_j)

Contrairement au deux autres seuils, la valeur du seuil de préférence stricte pour un critère est à la fois influencé par le niveau d'incertitude/imprécision que renferment les évaluations sur ce critère et par son importance relative. D'une part, on peut se baser sur un raisonnement similaire à celui menant à la détermination du seuil de veto pour établir une relation avec l'importance relative. Ainsi, une petite différence d'évaluation sera beaucoup plus significative si le critère est important. La valeur du seuil de préférence stricte serait donc porté à décroître avec l'importance du critère. À la limite, avec un critère dictateur ($\pi_j = 1$), le seuil de préférence stricte devrait être égal au seuil de veto puisque si une action est strictement préférée à une autre sur ce critère, cette dernière ne peut être au moins aussi bonne que la première. Tel que proposé par Rousseau et Martel (1994), la valeur du seuil de préférence stricte devrait décroître avec l'importance du critère jusqu'à un minimum correspondant au seuil de veto lorsque $\pi_j = 1$.

D'autre part, lorsque les évaluations sont incertaines et/ou imprécises, ce seuil doit être plus élevé pour tenir compte de cette incertitude/imprécision. De plus, par définition, le seuil de préférence stricte doit être supérieur au seuil de d'indifférence et inférieur au seuil de veto ($q_j \leq p_j \leq v_j$). Nous proposons la relation suivante qui permet de respecter l'ensemble de ces conditions pour la valeur du seuil de préférence stricte :

$$p_j = \Delta.E_j + \alpha(I_j)(v_j - q_j), \text{ avec } \alpha(I_j) = \begin{cases} 0.05 & si \quad I_j = f \\ 0.15 & si \quad I_j = m \\ 0.30 & si \quad I_j = e \end{cases}. \tag{3.5}$$

Tout comme pour les valeurs de β, les valeurs de $\alpha(I_j)$ sont subjectives et pourront être modifiées après certaines expériences; elles ont été établies à partir de simulations.

Comme les valeurs proposées pour ces seuils dépendent de l'étendue (E_j) de l'échelle associée au critère *j*, il est important que ces étendues soient établies de manière adéquate. Dans le cas du CESA, cela ne pose pas de difficulté pour les échelles associées aux critères

C_1, C_2, C_3 *et* C_{13} puisque $E_j \leq 1$, $j = 1,2,3$ *et* 13. Pour E_8, l'étendue de l'échelle associée au critère C_8 (coûts variables en $), nous pouvons dans un premier temps convenir que $E_8 = \max_i (e_{i8}) - \min_i (e_{i8})$; le personnel devrait confirmer que c'est une étendue vraisemblable pour l'échelle associée au critère C_8. L'étendue E_7 ne doit pas entraîner trop de difficulté puisqu'elle doit normalement être inférieur à 2 ou 3.

Pour un critère distributionnel (aléatoire ou flou), il n'y a pas lieu de définir explicitement un indicateur d'incertitude/imprécision puisque cela est pris en compte dans la distribution. Il ne faut toutefois pas oublier comme le rappel si justement Rogers et Bruen (1998b) que les seuils de discrimination servent non seulement à tenir compte de l'incertitude/imprécision, mais également de la "sensibilité humaine" (préférence) aux différences dans les évaluations. Alors, même si on n'a pas à tenir compte de la première composante pour les évaluations distributionnelles, il faut tenter de tenir compte des préférences du décideur. Nous proposons donc d'utiliser les valeurs par défaut même pour un critère distributionnel, mais en divisant par exemple par deux (2) la valeur par défaut pour les seuils d'indifférence (q_j).

Nous pouvons noter également que les seuils de discrimination de même que le seuil de veto, n'ont pas à être constants quelque soit le niveau sur l'échelle d'évaluation. Un même écart n'a pas nécessairement le même impact (en terme de préférence) selon qu'il est calculé pour de petite valeur ou de grande valeur sur l'échelle associée au critère. Cela pourrait être le cas par exemple pour les seuils associés au critère C_8.

4. La détermination des coefficients d'importance relative des critères

La littérature abordant ce sujet dans le cadre des procédures d'agrégation multicritères est assez abondante (Gbodoussou, 1989; Goldstein, 1990; Mousseau, 1989; Rogers et Bruen, 1998a ; etc.). Il en ressort que ces coefficients ne jouent pas le même rôle d'une procédure à une autre (selon que la procédure est compensatoire ou non ou partiellement par exemple) et donc qu'ils doivent être déterminés d'une manière consistante avec le rôle qu'ils ont à jouer.

Idéalement, ils devraient être déterminés de manière indirecte à partir de jugements holistiques (globaux), sur les actions à comparer, repris par la procédure concernée. De manière fréquente, et peut être plus réaliste, ils sont obtenus de façon directe en demandant au décideur d'exprimer des valeurs pour ces coefficients. A cet effet, il y a différentes façon de procéder ("Ranking" et "Ranking & Rating" (Simos, 1990) ; l'Entropie (Zeleny, 1982); AHP (Saaty, 1980); etc.).

Pour les procédures de type surclassement de synthèse, comme c'est le cas pour PAMSSEM, il semble que la méthode de Simos révisée (Schärlig, 1996) ou la méthode de comparaison par paire de Saaty (1980) seraient appropriées. Nous proposons ici, une méthode qui s'inspire des deux et qui s'affranchit, au moins partiellement, de certaines faiblesses propres à ces deux méthodes.

4.1. La méthode proposée

La méthode hiérarchique multicritère (AHP de Saaty, 1980) est basée sur la quantification de jugements subjectifs concernant la relation (d'importance) qui existe entre deux éléments d'un même niveau hiérarchique par rapport à l'élément du niveau immédiatement supérieur auquel ils sont liés. Cette méthode a connu et connaît encore une grande popularité même si elle fait l'objet de très nombreuses critiques. Sa popularité est certainement attribuable à l'utilisation d'une échelle sémantique pour obtenir les jugements de valeurs par comparaisons par paire et à son support informatique qui est assez convivial. Parmi les principales critiques formulées envers AHP (Dyer, 1990), on retrouve celles reliées à l'échelle numérique linéaire qui est associée à l'échelle sémantique (voir tableau 11), à l'absence d'un point de référence, à la quantification de ces jugements à partir de la méthode du vecteur propre de Perron-Forbenius et au reversement des rangs.

Tableau 11 : Échelle de Saaty	
Échelle numérique	**Échelle sémantique**
1	D'égale importance
3	Un peu plus important
5	Plus important
7	Beaucoup plus important
9	Extrêmement plus important
2, 4, 6 et 8	Etant des échelons intermédiaires

Sans prétendre s'affranchir de toutes les faiblesses attribuées à AHP, nous proposons néanmoins une méthode de quantification dans laquelle l'échelle numérique associée à l'échelle sémantique (que l'on conserve puisqu'il s'agit d'un point fort de AHP) est modifiée ainsi que la manière de recueillir les jugements de valeurs. Dans la démarche de quantification que nous proposons nous réduisons à son minimum le nombre de comparaisons par paire ($\leq$ n-1 lorsque les jugements portent sur n critères) mais nous faisons ordonner les critères et calibrer l'échelle numérique par l'utilisateur (le décideur) à la manière de Simos (1990).

4.2. Échelle numérique associée à l'échelle sémantique

À ce niveau nous proposons deux façons différentes pour associer une échelle numérique à une échelle sémantique.

4.2.1. Première façon

Tel que suggéré par de nombreux auteurs (Dyer, 1990 ; Holder, 1990 ; Lootsma, 1989), nous pouvons remplacer l'échelle numérique linéaire bornée de 1 à 9 par une échelle géométrique illimitée $1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\alpha^4$ ..., où α (> 1) représente le plus petit ratio d'importance perceptible par l'utilisateur. Nous lui demandons donc de préciser la valeur de ce ratio en lui demandant d'interpréter numériquement le jugement de valeur "un peu plus important". Pour ce faire, nous pouvons lui offrir un support visuel comportant deux rectangles : l'un fixe de surface égale à 1 (un carré) et l'autre dont il peut faire varier la surface à volonté en modifiant

la hauteur du rectangle à condition qu'elle reste toujours supérieure ou égale à 1. Une fois cette hauteur fixée, la surface de ce deuxième rectangle exprime de combien, pour lui, un critère est plus important qu'un autre lorsqu'il juge que ce critère est "un peu plus important" que cet autre. En tenant compte des niveaux intermédiaires possibles pour l'échelle sémantique où le premier niveau perceptible se situerait entre "d'égale importance" et "un peu plus important", la valeur numérique ainsi obtenue correspondra à α^2. Évidemment, cette valeur numérique peut dépendre non seulement de la personne qui porte le jugement mais également du contexte particulier (ex. la nature des critères qui font l'objet de ces jugements) dans lequel s'effectue ce jugement. L'échelle numérique ainsi associée à l'échelle sémantique est :

- égale importance → $\alpha^0 (=1)$
- un peu plus important → α^2
- plus important → α^4
- beaucoup plus important → α^6
- extrêmement plus important → α^8

4.2.2. Deuxième façon

Encore ici nous demandons à l'utilisateur de calibrer l'échelle numérique associée à l'échelle sémantique. Cette calibration est cependant limitée par une contrainte : les écarts entre les échelons doivent être égaux ou linéairement croissant. L'échelle numérique associée à l'échelle sémantique peut ainsi être caractérisée par deux paramètres, l'écart initial, c'est-à-dire l'écart entre les échelons 1 et 2 $(\Delta_{1,2})$, et le taux d'accroissement des écarts $\alpha(\geq 1)$. Les autres écarts peuvent être obtenus par la relation qui caractérise l'échelle :

$$\Delta_{n,n+1} = \alpha \Delta_{n-1,n} \qquad (4.1)$$

Comme la valeur de l'échelon 1 est fixée par définition à 1 (facteur correspondant à l'échelon "également important", lorsque $(\Delta_{1,2})$ et α sont connus, les valeurs V_n associées à chacun des échelons 2 à 9 peuvent être obtenues à l'aide de l'équation suivante :

$$V_n = V_{n-1} + \alpha \Delta_{n-1,n} \qquad (4.2)$$

Pour calibrer l'échelle numérique associée à l'échelle sémantique, il faut donc obtenir les valeurs de $(\Delta_{1,2})$ et α . Il s'agit cependant de paramètres qui peuvent difficilement être obtenus directement par l'utilisateur. Ces paramètres peuvent toutefois être calculés si on obtient les valeurs associées à trois des neuf échelons de l'échelle sémantique. Tel que mentionné, la valeur de l'échelon 1 est fixée par définition ($V_1 = 1$), il suffit donc d'obtenir de l'utilisateur les valeurs associées à deux des autres échelons. Par exemple, l'utilisateur peut fournir la valeur des échelons médians de l'échelle sémantique, à savoir les échelons 3 ("un peu plus important") et 7 ("beaucoup plus important"). Ainsi, avec les valeurs V_3 et V_7, le paramètre $\alpha(\geq 1)$ est obtenu en résolvant l'équation :

$$\begin{aligned} &\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + C\alpha + C = 0 \\ &avec \quad C = 1 - ((V_7 - V_1)/(V_3 - V_1)) \\ &et \quad \alpha \geq 1 \end{aligned} \tag{4.3}$$

L'équation suivante permet ensuite de calculer le paramètre $(\Delta_{1,2})$:

$$\Delta_{1,2} = (V_3 - 1)/(1 + \alpha) \tag{4.4}$$

Cette deuxième façon de faire, oblige l'utilisateur à calibrer deux échelons de l'échelle sémantique ce qui est peut-être préférable.

4.3. Rangement des critères et jugements par paire

Avant de demander à l'utilisateur d'effectuer des jugements de valeurs à partir de comparaisons par paire, nous lui demandons de ranger, en ordre décroissant d'importance, les critères qui feront l'objet de ces jugements. Nous lui proposons de procéder de la manière suivante : après avoir bien pris connaissance de tous les critères composant l'ensemble, il identifie celui qui, selon lui, est le plus important et il le retire de l'ensemble; puis il recommence avec l'ensemble restant jusqu'à ce qu'il ne reste plus aucun élément dans l'ensemble. Il peut identifier des critères d'égale importance à une itération ou l'autre de ce processus. Une fois que les critères ont été rangés $\{C_{(1)}, C_{(2)}, \ldots\ldots, C_{(n')}\}$, avec éventuellement des ex aequo ($n' \leq n$ puisque les sous-ensembles de critères $C_{(i)}$ peuvent comporter plus qu'un critère), nous lui demandons de porter des jugements de valeurs à l'aide de l'échelle

sémantique pour chacune des $n'-1$ comparaisons par paire suivantes : $(C_{(j)}, C_{(j+1)})$ avec $j = 1,2....,n'-1$. Si les sous-ensembles $\{C_{(j)}\}$ ou $\{C_{(j+1)}\}$ contiennent plus d'un critère, comme tous les critères d'un même sous-ensemble sont d'égale importance, on ne compare que l'un ou l'autre des critères ex aequo dans chaque classe d'équivalence. On note par r_{ik} l'importance relative d'un critère de $\{C_{(i)}\}$ par rapport à un critère de $\{C_{(k)}\}$, $i,k = 1,2....,n'-1$. Par la suite, on peut remplir la matrice réciproque M des jugements relatifs exprimés numériquement en appliquant la relation de transitivité; la réciprocité implique $r_{ik} = 1/r_{ki}$ et la transitivité $r_{ij}r_{jk} = r_{ik}$. Bien entendu, il ne sera pas question de calculer un indice de cohérence par la suite.

$$M_{n\times n} = \begin{array}{c|cccccc} & \{C_{(1)}\} & \{C_{(2)}\} & .... & \{C_{(k)}\} & .... & \{C_{(n')}\} \\ \hline \{C_{(1)}\} & 1^{*} & & & & & \\ \{C_{(2)}\} & & 1 & & & & \\ .... & & & & & & \\ \{C_{(i)}\} & & & & r_{ik}^{\bullet} & & \\ .... & & & & & & \\ \{C_{(n')}\} & & & & & & 1 \end{array}$$

On doit noter que dans AHP, les $n(n-1)/2$ comparaisons par paire requises apportent de la précision mais introduisent éventuellement de l'incohérence, laquelle est mesurée par un indice. Non seulement cet indice est-il contesté, mais le nombre, parfois élevé, de comparaisons par paire requis (45 lorsque n =10, 91 lorsque n =14) constitue un obstacle d'ordre pratique non négligeable.

---

* *représente le scalaire 1 ou une matrice carrée dont toutes les composantes sont des 1.*

• *représente le scalaire r_{ik} ou une matrice dont toutes les composantes sont des r_{ik}.*

4.4. *Quantification des jugements subjectifs*

Nous voulons maintenant établir la résultante de toutes les comparaisons par paire qui sont enregistrées dans la matrice réciproque M ; c'est ce que l'on qualifie dans AHP de vecteur des priorités. La matrice réciproque M obtenue en appliquant la transitivité a des propriétés particulières. Si on note par :

- $r_{(j,j+1)}$ l'importance relative d'un critère du sous-ensemble $\{C_{(j)}\}$ par rapport à un critère du sous-ensemble $\{C_{(j+1)}\}$, $j = 1,2...,n'-1$ et n'= le nombre de sous-ensemble de critères ;
- ς_j le nombre de critères du sous-ensemble $\{C_{(j)}\}$, avec $\sum_{1}^{n'} \varsigma_j = n$ et n= le nombre total de critères ;
- δ' la valeur unitaire de l'importance de chacun des critères du sous-ensemble $\{C_{(n')}\}$, c'est-à-dire le sous-ensemble des critères les moins importants,

alors la valeur totale de l'importance des n critères est donnée par :

$$\sum_{k=n'}^{1} \tilde{a}_k \varsigma_k \delta' \tag{4.5}$$

où, $\gamma_k = \prod_{j=n'-1}^{k} r_{(j,j+1)}$, $k = n'-1, n'-2,...,1$ et $\tilde{a}_{n'} = 1$

Le facteur γ_k est l'importance relative d'un critère du sous-ensemble $\{C_{(n')}\}$, qui est le sous-ensemble des critères les moins importants. Les valeurs $r_{(j,j+1)}$ sont fournies par l'utilisateur (le décideur), les ς_k sont déduits du rangement des n critères qui font l'objet des jugements. On a l'habitude de normaliser les composantes du vecteur ainsi obtenu, lorsqu'il s'agit du vecteur des coefficients d'importance relative des critères. On doit donc avoir :

$$\sum_{k=n'}^{1} \tilde{a}_k \varsigma_k \delta' = 1 \text{ de sorte que } \delta' = \frac{1}{\sum_{k=n'}^{1} \tilde{a}_k \varsigma_k}. \tag{4.6}$$

Ainsi, la composante δ_j du vecteur des coefficients d'importance relative des critères de la classe $\{C_{(j)}\}$, $j = 1,2....,n'$, sera obtenue de la manière suivante :

$$\delta_j = \frac{\tilde{a}_j}{\sum_{k=n'}^{1} \tilde{a}_k \varsigma_k} \qquad (4.7)$$

Il est à noter que nous obtenons les mêmes résultats que si l'on normalisait les moyennes géométriques des lignes de la matrice M.

Si l'on veut appliquer cette méthode dans le cas du CESA, il faudrait 1) que la personne responsable de déterminer les coefficients d'importance relative des 14 critères présentés au tableau 10, commence par indiquer, en utilisant l'une ou l'autre des deux façons indiquées, les valeurs de son échelle numérique associée à l'échelle sémantique ; 2)qu'elle range ensuite par ordre d'importance, avec éventuellement des ex æquo, les 14 critères ; 3) qu'elle indique, en utilisant l'échelle sémantique, l'importance relative d'un critère de rang « j » par rapport à un critère de rang « j+1 », et cela pour le rang 1 p/r au rang 2, le rang 2 p/r au rang 3, ainsi de suite. On est ainsi en mesure de construire la matrice réciproque M et de déterminer les δ_j, $j = 1,2....,14$.

5. L'analyse de sensibilité dans le cadre du projet CESA

Dans l'aide multicritère à décision, l'établissement des données (le tableau d'évaluation, les poids des critères, de fonctions de préférence, etc.) joue un rôle très important dans le résultat final. En effet, les résultats obtenus par l'application des méthodes d'aide multicritère à la décision sont fortement liées aux valeurs initiales attribuées à ces données. Lorsqu'on est en présence d'imprécision dans les données, les résultats obtenus par ces méthodes doivent être interprétés avec beaucoup de prudence. Afin de faciliter cette interprétation, plusieurs techniques d'analyse de *sensibilité* ont été proposées dans la littérature. Elles traitent principalement des évaluations des actions et de l'influence des coefficients d'importance relative mais également d'autres paramètres (seuils) des critères.

Bien que la majorité de ces techniques ont été élaborées pour des méthodes multicritères additives, leurs concepts de base peuvent être généralisés puis appliqués pour des méthodes de type surclassement de synthèse. Dans le présent travail nous allons présenter quelques techniques d'analyse de sensibilité pouvant être appliquées dans le cadre du projet CESA. En effet, dans le cadre de ce projet nous proposons une procédure d'agrégation de type surclassement de synthèse, appelée Procédure d'Agrégation Multicritère de type Surclassement de Synthèse pour Évaluations Mixtes (PAMSSEM), basée d'une part sur la méthode ELECTRE III pour la construction des relations de surclassement, d'autre part sur les méthodes PROMÉTHEE I et II pour l'exploitation de ces relations. Dans ce qui suit, nous allons présenter tout d'abord comment l'analyse de sensibilité a été définie dans la littérature, ensuite nous proposons quelques techniques d'analyse pouvant être appliquées dans le cadre de PAMSSEM.

5.1. Définition

Quelque soit la nature de la démarche de l'aide à la décision, le décideur fait face à des sources d'arbitraire qui l'obligent à attribuer à certaines grandeurs une valeur conventionnelle (parce que les grandeurs en question sont mal connues, difficilement prévisibles, ou encore mal déterminées). Il doit aussi prendre des actions de modélisation qui font intervenir des éléments techniques, lesquels lui laissent une certaine marge de liberté pour achever de définir son modèle. Donc selon Roy et Bouyssou (1993), tout cela nous amène souvent à hésiter sur la valeur à attribuer à ce qu'ils appellent :

- Des paramètres économiques : coefficients d'importance, seuils de veto, seuils de préférences, moyennes ou écarts-types dans une distribution de probabilités, coefficients caractérisants l'attitude face au risque dans une fonction d'utilité, etc.
- Des paramètres techniques : valeurs du niveau de concordance dans ELECTRE I ou IS, relations à retenir dans ELECTRE IV, forme analytique à adopter pour une distribution de probabilité ou encore une fonction d'utilité.

En effet, une manière simple pour éviter ces hésitations est d'attribuer à chacun de ces paramètres, une valeur centrale en ce sens que, dans la marge d'arbitraire qui nous est laissée,

elle occupe une position aussi peu extrême que possible. On peut aussi chercher à encadrer en appréhendant des valeurs par excès et par défaut qui, tout en demeurant acceptables, ne peuvent plus être regardées comme centrales.

En fixant la valeur de chaque paramètre à sa valeur centrale ou à sa valeur la plus vraisemblable, on définit, en relation avec la procédure d'agrégation multicritère (PAMC) retenue, un système relationnel de préférence particulier (ou, plus brièvement, système de préférence). En appliquant une procédure d'exploitation à ce système de préférence, on obtiendra des résultats permettant d'élaborer des recommandations. Ces dernières peuvent être plus ou moins dépendantes des valeurs particulières attribuées à chaque paramètre. Des valeurs différentes auraient pu conduire à d'autres systèmes relationnels (sensiblement différents du système de référence) aboutissant éventuellement à d'autres résultats et, peut être, à d'autres recommandations.

Cette dépendance entre valeurs de paramètres et recommandations est généralement traitée par ce qu'il est convenu d'appeler **une analyse de sensibilité**. Elle consiste à analyser l'influence de chacun des paramètres sur les résultats de la procédure d'exploitation. Elle permet notamment de mettre en évidence les paramètres dont la valeur, lorsqu'elle varie autour de sa position initiale, affecte le plus fortement les résultats.

5.2. Analyse de sensibilité sur les poids des critères

Mareschal (1988) a examiné la stabilité du résultat obtenu par l'application des méthodes PROMÉTHÉE I et II en faisant varier les poids des critères. Dans cet article, il a étudié trois aspects de stabilité pour déterminer la sensibilité de la structure de préférence (de type (P,I,R)) provoquée par la variation des poids. Pour ce faire, il a proposé une manière de construire des intervalles de stabilité des poids pour chaque critère ou pour un sous-ensemble de critères. En effet, les trois types de stabilité étudiées dans ce travail ont été définis de la façon suivante :

- *Stabilité totale* : la position de *chaque* action de l'ensemble des actions A dans la structure (P,I,R) présente de l'intérêt pour le décideur. Dans ce cas, il utilise un rangement complet des actions pour donner l'ordre de priorité dans la réalisation des différentes actions de l'ensemble A. Une stabilité totale est alors définie comme l'absence de tout changement dans la structure (P,I,R) entière.

- *Stabilité partielle* : le décideur porte son intérêt sur une seule action ou un petit nombre d'actions qui peuvent être par exemple les k premières actions dans un préordre total ou les « meilleures » actions dans un préordre partiel. Ce qui est important dans ce type de stabilité, c'est que la position de ces k actions reste inchangée aux variations des poids. Alors on peut dire que cette notion de stabilité concerne seulement la stabilité d'une partie de la structure (P,I,R) : si B est un sous-ensemble des « bonnes » actions, alors seule la restriction des couples $B \times A$ de la structure de préférence doit être inchangée. Dans ce cas, il parle aussi de la stabilité du « meilleur choix». Une stabilité partielle sur un sous-ensemble B est alors définie comme l'absence de tout changement dans la restriction de la structure (P,I,R) sur B.

- *Stabilité d'un sous-ensemble* : il définit la stabilité d'un sous-ensemble G de A comme si le décideur veut éliminer les « mauvaises » actions de A afin d'obtenir un sous-ensemble G des « bonnes » actions sans qu'il possède d'informations additionnelles concernant ces actions. Différentes méthodes ont été proposées pour construire le sous-ensemble G. Une façon possible, c'est d'utiliser la méthode de PROMÉTHÉE II avec . $G = \{a \in A, tel\ que\ (a) > 0\}$.

Pour chaque type de stabilité décrit ci-dessus, Mareschal (1988) a proposé deux façons de procéder pour la construction des intervalles de stabilité des poids (ISP). Dans la première, il examine la stabilité de la structure de préférence (P,I,R) en maintenant tous les poids des critères fixes sauf un, soit C_i. Alors, pour déterminer les bornes de l'ISP du critère C_i, il fait varier seulement son poids π_i autour de sa valeur initiale. Dans la deuxième, il examine la stabilité de la structure de préférence (P,I,R) à travers la modification du total des poids

d'un sous-ensemble de critères. En fait, cette deuxième analyse de stabilité est très intéressante puisque, dans la majorité des applications pratiques, on peut regrouper un certain nombre de critères en des sous-ensembles homogènes comme : le risque, la flexibilité, etc. De plus, la façon de procéder pour construire des ISP dans la deuxième approche est similaire à celle pour un seul critère.

Pour fins d'illustration sur l'importance de l'analyse de stabilité d'un sous-ensemble de critères, prenons le cas du projet CESA. En effet, dans la version actuelle du CESA, on a essayé de construire une famille de critères qui respecte les exigences de cohérence. À cette fin, cinq facteurs ont été retenus : *flexibilité*, *complexité*, *capacité d'accomplissement*, *utilisation optimale des ressources* et enfin le *risque d'échec de la mission* (voir figure 1). Ces facteurs correspondent aux facteurs globaux dans la version actuelle du CESA. Ils servent à réfléchir sur les critères et sur la manière de les construire. Sur la base de ces cinq facteurs, on a proposé la construction de 14 critères dont la répartition est la suivante : trois critères pour le facteur flexibilité, trois critères pour le facteur complexité, le facteur capacité d'accomplissement ainsi que le facteur utilisation optimale des ressources sont retenus comme deux critères et enfin six critères pour le facteur risque. Donc pour étudier la stabilité de la structure de préférence (P,I,R) en tenant compte seulement du facteur flexibilité, on doit établir des modifications sur la somme des poids du sous-ensemble de critères constituant ce facteur.

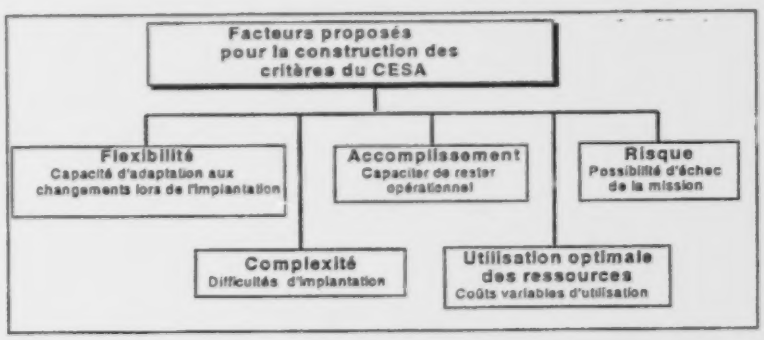


Figure 7 : Les différents facteurs retenus pour la construction des critères

Dans cette même optique, Wolters et Mareschal (1995) ont proposé trois types d'analyse de sensibilité concernant les méthodes additives de type PROMÉTHÉE. En effet, ces analyses s'articulent principalement autour des trois axes suivants :

- Déterminer la sensibilité du rangement aux changements dans les évaluations des différentes actions sur un certain nombre de critères ;
- Déterminer l'influence des évaluations de quelques actions sur certains critères ;
- Déterminer la modification minimale nécessaire des poids des critères permettant à une action donnée d'avoir le premier rang dans le rangement.

Ces deux auteurs soulèvent que l'importance du premier type d'analyse de sensibilité se manifeste principalement lorsque les évaluations selon certains critères sont incertaines. Ceci peut être illustré pour un critère qui traite de circonstances économiques incertaines. Dans ce cas, l'analyse de sensibilité est effectuée par l'élaboration d'un ensemble de **scénarios**, établis au moyen de certaines modifications dans l'évaluation des actions sur certains critères jugés importants, dans le but de voir le comportement du rangement de quelques actions spécifiques. En effet, ce type d'analyse permet d'exclure les actions qui détiennent, quelque soit le scénario utilisé, les dernières positions ou de garder d'autres actions qui se placent dans les premiers rangs.

Le second type d'analyse de sensibilité se présente, selon ces mêmes auteurs, dans le cas où l'incertitude est présente dans les évaluations d'une seule action (le cas où le décideur n'est pas certains des évaluations accordées à une action spécifique sur les différents critères). Dans ce cas, l'analyse de sensibilité sera étudiée par **itérations**. Pour se faire, ils sélectionnent un certain nombre d'actions puis déterminent de combien réduire ou accroître les évaluations de chacune de ces actions sur certains critères afin de permettre à une action d'avoir un rangement particulier. Puisque ce type d'analyse de sensibilité est traité d'une façon itérative, on ne peut obtenir que les intervalles contenants la réduction ou l'augmentation déjà établies.

Enfin, Wolters et Mareschal (1995) soulèvent que l'objectif du dernier type d'analyse de sensibilité est de construire des intervalles de stabilité pour les poids des critères de façon que si on associe à ces derniers des nouvelles valeurs à l'intérieur de ces intervalles le rangement des actions reste inchangé. Bien que cette technique fournit suffisamment d'information sur la stabilité du rangement lui-même, elle ne permet pas d'examiner son comportement une fois qu'on dépasse les bornes de ces intervalles. Dans ce contexte, ces auteurs proposent une analyse de sensibilité des poids qui offre, à travers un modèle mathématique, au décideur une exploration totale de l'espace des poids en tenant compte de certaines exigences concernants leurs variations. En effet, ce modèle permettra au décideur de :

- avoir la possibilité, en introduisant des coefficients de coûts dans la fonction objectif, de juger si les modifications sur certains critères sont plus acceptables que d'autres ;
- considérer la relation de l'importance relative entre deux critères qui doit être maintenue constante ;
- considérer la relation de l'importance absolue entre plusieurs critères qui doit être maintenue constante ;
- spécifier des bornes sur les valeurs des poids des critères.

5.3. Opérationnalisation de ces différentes analyses de sensibilité

Comme on l'a mentionné au début de ce document, la majorité des analyses de sensibilité ont été élaborées pour des méthodes d'aide à décision additives. Dans ce qui suit nous allons d'abord présenter une définition des méthodes dites additives ensuite fournir les modèles analytiques pour la mise en œuvre des différentes analyses de sensibilité décrites dans la section précédente.

5.3.1. Les méthodes d'aide multicritère à la décision additives : définition

Considérons un ensemble fini d'actions réalisable A et k critères valués $(C_1, C_2, ..., C_k)$. Sans perte de généralité, on suppose que tous ces critères sont à maximiser.

Le poids de chaque critère C_j est un nombre réel positif noté π_j et représente l'importance relative attribuée par le décideur au critère C_j.

Pour aider le décideur à sélectionner la « meilleure » action ou à classer l'ensemble des actions A de la meilleure à la pire, la majorité des méthodes d'aide multicritère à la décision construisent sur l'ensemble A une structure de préférence notée (P,I,R) (où P : la préférence, I : l'indifférence, R : l'incomparabilité). Dans ce qui suit, on va se limiter à une classe de méthodes où (P,I,R) est un préordre partiel si $R \neq \varnothing$, total sinon.

Une méthode d'aide multicritère à la décision est *additive* d'ordre r si et seulement s'il existe r fonctions réelles valuées de la forme :

$$\begin{cases} V_l(a) = \sum_{j=1}^{k} \pi_j V_{lj}(C_j(a), C_j(A)), & (5.1) \\ a \in A;\ l = 1,\ldots r, \\ \text{tel que pour } a,b \in A \\ \begin{cases} aPb \text{ ssi } V_l(a) \geq V_l(b),\ l = 1,\ldots r, \text{ avec au moins une inégalité stricte} \\ aIb \text{ ssi } V_l(a) = V_l(b),\ l = 1,\ldots r, \\ aRb \text{ autrement.} \end{cases} & (5.2) \end{cases}$$

La notation $V_{lj}(C_j(a), C_j(A))$ décrit d'une part la relation de dépendance entre V_{lj} et $C_j(a)$, d'autre part elle n'exclut pas la dépendance entre V_{lj} et toutes autres évaluations d'actions sur le critère C_j.

Exemple 1 : La méthode PROMÉTHÉE I

Dans la méthode de surclassement PROMÉTHÉE I, on construit un préordre partiel basé sur les deux flux suivants :

- Le flux sortant :

$$\varphi^+(a) = \sum_{b \in A} \pi(a,b), \qquad (5.3)$$

- Le flux entrant :

$$\varphi^-(a) = \sum_{b \in A} \pi(b,a) \tag{5.4}$$

où $\pi(a,b)$ est l'indice de préférence donnant l'intensité de préférence globale de a sur b et qui s'écrit comme la somme de fonctions de préférence locale $P_j(a,b)$ pondérées par le poids qui leur est associé, soit :

$$\pi(a,b) = \sum_{j=1}^{k} \pi_j P_j(a,b), \tag{5.5}$$

on suppose ici que la somme des poids est égale à 1. On peut donc réécrire (5.3) et (5.4) de la façon suivante :

$$\varphi^+(a) = \sum_{j=1}^{k} \pi_j \varphi_j^+(a), \text{ avec } \varphi_j^+(a) = \sum_{b \in A} P_j(a,b) \tag{5.6}$$

$$\varphi^-(a) = \sum_{j=1}^{k} \pi_j \varphi_j^-(a), \text{ avec } \varphi_j^-(a) = \sum_{b \in A} P_j(b,a) \tag{5.7}$$

Donc on peut décrire PROMÉTHÉE I comme une méthode additive d'ordre 2, soit :

$$\begin{cases} aPb \text{ ssi } V_1(a) \geq V_1(b), \\ \quad V_2(a) \geq V_2(b), \\ \quad \text{avec au moins une inégalité stricte} \\ aIb \text{ ssi } V_1(a) = V_1(b), \\ \quad V_2(a) = V_2(b) \\ aRb \text{ autrement.} \\ \text{avec } V_{1j}(a) = \varphi_j^+(a) \text{ et } V_{2j}(a) = -\varphi_j^-(a) \end{cases} \tag{5.8}$$

Exemple 2 : PROMÉTHÉE II

Dans PROMÉTHÉE II le préordre complet est obtenu en faisant la différence entre les flux entrant et sortant :

$$\varphi(a) = \varphi^+(a) - \varphi^-(a) \tag{5.9}$$

Par analogie avec les équations (5.6) et (5.7), on a :

$$\varphi(a) = \sum_{j=1}^{k} \pi_j \varphi_j(a), \text{ avec } V_{1j}(a) = \varphi_j(a)$$

On peut donc conclure que PROMÉTHÉE II est une méthode additive d'ordre 1.

5.3.2. Construction d'intervalles de stabilité de poids (ISP)(Mareschal, 1988)

Construction des ISP pour un seul critère

Dans ce cas, les poids π_j de chaque critère sont supposés strictement positifs et normalisés à l'unité. Nous allons maintenant examiner la stabilité de la structure de préférence (P,I,R) lorsque tous les poids des critères sont maintenus fixes sauf pour un seul critère, soit C_i. Pour déterminer les bornes de ISP du critère C_i, on fait varier son poids π_i autour de sa valeur initiale de la façon suivante :

$$\pi_i^{'} = (1+\beta)\pi_i, \beta \geq -1 \tag{5.10}$$

Dans le but de maintenir les nouveaux poids $\pi_i^{'}$ normalisés, il est nécessaire d'ajuster tous les autres poids et de s'assurer que seule l'importances relative du critère i sera modifiée, soit:

$$\pi_j^{'} = \alpha\pi_j, \forall j \neq i \tag{5.11}$$

Les paramètres α et β doivent vérifier les contraintes de non négativité des poids modifiés. En effet, ces deux paramètres sont reliés par les relations suivantes :

$$\alpha = \frac{1-(1+\beta)\pi_i}{1-\pi_i}, \tag{5.12}$$

$$-1 \leq \beta \leq \frac{1-\pi_i}{\pi_i}, \tag{5.13}$$

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{1-\pi_i}. \tag{5.14}$$

En utilisant la notation introduite en (5.1), on note V_i' les fonctions réelles valuées associées aux poids modifiés (dans le but d'alléger l'écriture on supposera dans le reste de ce texte que $V_{li}(C_i(a),C_i(A)) \equiv V_{li}(a)$, soit :

$$V_i'(a) = \alpha V_i(a) + (1-\alpha)V_{li}(a) \tag{5.15}$$

Méthode additive d'ordre 1

Dans ce cas particulier, on a $r=1$ et $l=1$ dans la notation de (5.15).La structure de préférence (P,I,R) devient un préordre total de type (P,I) :

$$\begin{cases} aPb & ssi \quad V(a)>V(b) \\ aIb & ssi \quad V(a)=V(b) \end{cases} \tag{5.16}$$

On note (P',I') le préordre total associé aux poids modifiés π_j'. Si on considère deux actions a et $b \in A$, trois types de changements peuvent apparaître :

$$\begin{cases} aPb \text{ et } bP'a : \textit{la préférence est inversée} \\ aPb \text{ et } aI'b : \textit{la préférences est transformée en une indifférence} \\ aIb \text{ et } aP'b : \textit{l'indifférences est transformée en une préférence} \end{cases}$$

En examinant les transformations précédentes, on peut conclure que la première inversion est la plus importante (ou dynamique). En effet, l'instabilité se manifeste si la préférence est inversée ou si l'indifférence est modifiée (dans ces deux cas a et b doivent être non indifférents). La modélisation de la condition d'inversion de la préférence entre deux actions a et b se présente comme suit :

$$(V(a)-V(b))(V'(a)-V'(b))<0 \tag{5.17}$$

Dans la formulation (5.17) on remarque qu'on n'a pas tenu compte des deux dernières transformations. Dans l'approche proposée par Mareschal (1988), un seul cas à la fois peut être pris en compte, soit : i) l'inversion de la préférence ; ii) la préférence se transforme en une indifférence ou inversement. Dans le premier cas $(V(a)-V(b)\neq 0)$ on peut alors écrire la condition de stabilité comme suit :

$$\Delta(a,b)\Delta'(a,b)>0. \tag{5.18}$$

D'une façon équivalente à la formulation présentée au (5.15), on peut écrire alors :

$$\alpha(\Delta(a,b)\Delta_i(a,b)-\Delta^2(a,b))<\Delta(a,b)\Delta_i(a,b) \tag{5.19}$$

où $\Delta(a,b)=V(a)-V(b)$ et $\Delta_i(a,b)=V_i(a)-V_i(b)$.

Cette dernière condition nous fournit des contraintes sur le paramètre α qui assurent la stabilité pour tout couple d'actions (a,b). Trois cas peuvent se présenter :

1. Si $\Delta(a,b)\Delta_i(a,b) > \Delta^2(a,b)$ alors C_i s'accorde fortement avec le rangement de a et b et on obtient une borne supérieure pour la région de stabilité, soit :

$$\alpha < \frac{\Delta(a,b)\Delta_i(a,b)}{\Delta(a,b)\Delta_i(a,b) - \Delta^2(a,b)} > 1 \qquad (5.20)$$

2. Si $\Delta(a,b)\Delta_i(a,b) < 0$ alors C_i ne s'accorde pas avec le rangement de a et b et on obtient une borne inférieure pour la région de stabilité, soit :

$$\alpha > \frac{\Delta(a,b)\Delta_i(a,b)}{\Delta(a,b)\Delta_i(a,b) - \Delta^2(a,b)} < 1 \qquad (5.21)$$

3. Si $0 \le \Delta(a,b)\Delta_i(a,b) \le \Delta^2(a,b)$ alors aucune inversion au sens de (5.18) n'est possible.

Dans le cas où a et b sont indifférents, alors on aura $\Delta(a,b) = 0$ et cette indifférence sera maintenue dans la préférence modifiée si et seulement si $\Delta'(a,b) = 0$. Considérant maintenant la formulation (5.15), la stabilité est obtenue dans les deux cas suivants : $\Delta_i(a,b) = 0$ ou $\alpha = 1$. Dans le premier cas, on a aucune contrainte sur α, alors que dans le deuxième cas on ne peut pas modifier le poids π_i sans changer l'indifférence en préférence.

Dans ce qui suit on va utiliser ces résultats pour construire les ISP pour chaque type de stabilité qui ont été présenté dans l'introduction : totale, partielle et de sous-ensemble.

a) *Les ISP dans le cas d'une stabilité totale*

Pour préserver le préordre total de (5.16), il faut qu'aucun couple d'actions (a,b) vérifie (5.17). Définissant maintenant les quantités suivantes :

$$\Omega^0 = \{(a,b) \in A \times A, \text{ sujet à } \Delta(a,b) = 0 \text{ et } \Delta_i(a,b) \neq 0\} \quad (5.22)$$

$$\Omega^- = \{(a,b) \in A \times A, \text{ sujet à } \Delta(a,b)\Delta_i(a,b) < 0\} \quad (5.23)$$

$$\Omega^+ = \{(a,b) \in A \times A, \text{ sujet à } \Delta(a,b)\Delta_i(a,b) > \Delta^2(a,b)\} \quad (5.24)$$

$$\alpha_i^- = \max_{(a,b)\in\Omega^-} \frac{\Delta(a,b)\Delta_i(a,b)}{\Delta(a,b)\Delta_i(a,b) - \Delta^2(a,b)} \quad (5.25)$$

$$\alpha_i^- = \min_{(a,b)\in\Omega^+} \frac{\Delta(a,b)\Delta_i(a,b)}{\Delta(a,b)\Delta_i(a,b) - \Delta^2(a,b)} \quad (5.26)$$

Si $\Omega^0 \neq \varnothing$, alors la région de stabilité de α est réduite à la valeur 1 et aucun changement de poids n'est permis. Si Ω^0 est vide, alors la stabilité pour le préordre total est obtenue par l'intervalle :

$$\alpha_i^- < \alpha < \alpha_i^+ \quad (5.27)$$

Même si Ω^0 est non vide, le seul changement permis dans ce cas c'est celui de l'indifférence à la préférence. En effet, si l'utilisateur est intéressé à la détection de l'inversion de préférence, alors la région de stabilité correspond à l'intervalle fermé (5.27). Comme α et β sont dépendants, on peut construire pour β un intervalle similaire à celui de α, soit :

$$\beta_i^- < \beta < \beta_i^+ \quad (5.28)$$

$$\beta_i^- = \frac{1-\pi_i}{\pi_i}(1-\alpha_i^+) \quad (5.29)$$

$$\beta_i^+ = \frac{1-\pi_i}{\pi_i}(1-\alpha_i^-) \quad (5.30)$$

Finalement, on peut construire les ISP du critère C_i de la façon suivante :

$$(\pi_i^-, \pi_i^+) = ((1+\beta_i^-)\pi_i, (1+\beta_i^+)\pi_i) \quad (5.31)$$

b) Les ISP dans le cas d'une stabilité partielle

Si le décideur s'intéresse seulement à la stabilité d'un sous-ensemble B de l'ensemble A des actions réalisables, alors il suffit de modifier légèrement la procédure présentée ci-dessus. En effet, on redéfinie les ensembles (5.22), (5.23) et (5.24) de la façon suivante :

$$\Omega_B^0 = \{(a,b) \in B \times A, \text{ sujet à } \Delta(a,b) = 0 \text{ et } \Delta_i(a,b) \neq 0\} \quad (5.32)$$

$$\Omega_B^- = \{(a,b) \in B \times A, \text{ sujet à } \Delta(a,b)\Delta_i(a,b) < 0\} \quad (5.33)$$

$$\Omega_B^+ = \{(a,b) \in B \times A, \text{ sujet à } \Delta(a,b)\Delta_i(a,b) > \Delta^2(a,b)\} \quad (5.34)$$

c) Les ISP dans le cas d'une stabilité d'un sous-ensemble

On suppose que le sous-ensemble G des « bonnes » actions est défini de la même manière que celle dans PROMÉTHÉE II, soit :

$$G = \{a \in A, \text{ sujet à } V(a) > 0\} \quad (5.35)$$

D'une façon équivalente à (5.17) et (5.19), on peut écrire :

$$V(a)V'(a) < 0 \quad (5.36)$$

$$\alpha\{V(a)V_i(a) - V^2(a)\} < V(a)V_i(a) \quad (5.37)$$

Les bornes pour le paramètre α sont obtenues par une légère modification des formules (5.22) au (5.26) : les Δ et les Δ_i sont remplacées respectivement par V et V_i, de plus les couples d'actions (a,b) sont remplacés par des actions singulières $a \in A$. L'extension de cette procédure demeure possible pour tout sous-ensemble G de la forme :

$$G = \{a \in A, \textit{tel que } V(a) > s, s \in R\} \quad (5.38)$$

Méthode additive d'ordre r (r ≥1)

On peut étendre la construction des ISP pour des méthodes additives d'ordre r ($r \geq 1$). Dans ce qui suit nous allons développer sommairement le cas des ISP pour une stabilité totale. Les extensions pour les deux autres cas de stabilité sont aussi possibles. En fait, l'effet d'une méthode d'ordre r sur la stabilité de la structure (P,I,R) est approximativement équivalente à l'effet de r fonctions V_l sur la stabilité de r structures prises individuellement. En réalité, chaque V_l peut définir lui même une méthode additive d'ordre 1 et de cette façon on peut construire un intervalle de stabilité α (comme dans 5.27) pour chaque fonction V_l, soit :

$$\alpha_{il}^{-} < \alpha < \alpha_{il}^{+},\ l = 1,.....,r \tag{5.39}$$

Un intervalle de stabilité global α pour une méthode additive d'ordre r peut être défini comme l'intersection de ces r intervalles :

$$\alpha_i^{-} = \max_l \alpha_{il}^{-} \tag{5.40}$$

$$\alpha_i^{+} = \min_l \alpha_{il}^{+} \tag{5.41}$$

Alors on peut construire de cette façon des intervalles de stabilité pour les poids de la même façon que dans les méthodes additives d'ordre 1 en remplaçant (5.25) et (5.26) par (5.40) et (5.41).

Construction des ISP pour un sous-ensemble de critères

Jusqu'à maintenant, nous avons varié un seul poids à la fois afin d'examiner son influence sur les résultats. Dans plusieurs applications pratiques, il arrive que quelques critères soient regroupés autour de facteurs comme : le risque, la flexibilité, etc. Cette opération de regroupement exige une analyse de stabilité de la structure de préférence (P,I,R) lorsque le poids total d'un sous-ensemble des critères est modifié. En effet, l'approche développée dans la section précédente permet facilement de construire des ISP pour un sous-ensemble de critères.

Soit S un sous-ensemble de s critères $(1 \le s \le S)$. Sans perte de généralité, on suppose que $S = \{C_1, C_2,..., C_s\}$ et que le poids total de ce sous-ensemble est :

$$\pi_S = \sum_{j=1}^{s} \pi_j \tag{5.42}$$

On suppose ici que les poids sont aussi normalisés à l'unité. Alors on peut écrire les poids modifiés de la manière suivante :

$$\pi_j' = \begin{cases} (1+\beta)\pi_j, j = 1,...,s, \\ \alpha\pi_j,\ j = s+1,...,k \end{cases} \tag{5.43}$$

D'une façon similaire à celle du cas d'un seul critère, la dépendance et les contraintes que doivent vérifier les paramètres α et β se présentent comme suit :

$$\alpha = \frac{1-(1+\beta)\pi_S}{1-\pi_S}, \tag{5.44}$$

$$-1 \le \beta \le \frac{1-\pi_S}{\pi_S}, \tag{5.45}$$

$$0 \le \alpha \le \frac{1}{1-\pi_S}. \tag{5.46}$$

On peut donc généraliser la relation (5.15), soit :

$$V_i'(a) = \alpha V_i(a) + (1-\alpha) V_{iS}(a) \tag{5.47}$$

$$\text{avec } V_{iS}(a) = \frac{1}{\pi_S} \sum_{j=1}^{s} \pi_j V_{ij}(a) \tag{5.48}$$

Donc il est toujours possible de construire les ISP sous des conditions similaires à (5.19), soit :

$$\alpha(\Delta_i(a,b)\Delta_{iS}(a,b) - \Delta_i^{\,2}(a,b)) < \Delta_i(a,b)\Delta_{iS}(a,b) \tag{5.49}$$

5.3.3. La stabilité de poids (Wolters et Mareschal, 1995)

En fait, dans ce travail Wolters et Mareschal (1995) ont proposé, comme nous l'avons mentionnés à la fin de la section 5.2, trois types d'analyses de sensibilité. Dans les deux premières ils n'ont pas proposé de formulation mathématique mais ils ont présenté deux façons de procéder à une analyse de sensibilité : dans la première, une analyse par scénarios alors que dans le deuxième une analyse par itération. Donc dans cette section, on s'intéresse seulement au troisième type d'analyse de sensibilité, à savoir la construction des intervalles de stabilité pour les poids des critères. Bien que les analyses précédentes de Mareschal (1988) fournissent suffisamment d'information sur la stabilité du rangement par la construction des intervalles de stabilité des poids, elles ne permettent pas de prévoir le comportement de ce rangement une fois qu'on dépasse les bornes. Par conséquent, on s'occupe dans ce qui suit, à travers un programme linéaire, à déterminer la modification minimale nécessaire sur les

valeurs des poids permettant à une action donnée d'avoir le premier rang dans le rangement final.

Si on veut déterminer l'ensemble des poids modifiés π_j' de façon que l'action a^* soit classée première, l'inégalité suivante doit être vérifiée :

$$(a^*) \succ\approx (a) \quad \forall a \in A \tag{5.50}$$

En développant l'expression du flux net donnée par (5.9) on aura :

$$\sum_{j=1}^{k} \left[\phi_j(a^*) - \phi_j(a)\right] \pi_j' \geq 0 \quad \forall a \in A, \tag{5.51}$$

avec,

$$\phi_j(a) = \sum_{b \in A} \left[P_j(a,b) - P_j(b,a)\right], j = 1,...k, \tag{5.52}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \pi_j' = 1 \tag{5.53}$$

$$\pi_j' \geq 0 \tag{5.54}$$

Chaque ensemble de poids π_j' doit satisfaire les relations (5.51) à (5.54) si on veut que l'action a^* soit classée première. Pour déterminer la modification minimale des poids π_j, on introduit une fonction objectif qui permet de mesurer la distance entre les valeurs initiales des poids et celles modifiées, soit :

$$Min \sum_{j=1}^{k} \left|\pi_j' - \pi_j\right| \tag{5.55}$$

On ne peut pas résoudre directement (5.55) en appliquant les techniques de la programmation linéaire traditionnelle. Pour surmonter cette difficulté, on modifie la définition des poids modifiés de la manière suivante :

$$\pi_j' = \pi_j + d_j^+ - d_j^- \tag{5.56}$$

où d_j^+ et d_j^- représentent respectivement l'augmentation ou la diminution des π_j. En utilisant (5.53), le programme mathématique qui résulte de (5.55) sujet à (5.51) - (5.54) se présente comme suit :

$$\begin{cases} Min \sum_{j=1}^{k} \left(d_j^+ + d_j^-\right) & (5.57) \\ \text{Sujet à :} & \\ \sum_{j=1}^{k} \left[\phi_j(a^*) - \phi_j(a)\right]\left(\pi_j + d_j^+ - d_j^-\right) \geq 0 \ \forall a \in A, & (5.58) \\ \sum_{j=1}^{k} \left(d_j^+ - d_j^-\right) = 0, & (5.59) \\ d_j^+ - d_j^- \geq -\pi_j, \ j = 1,...k, & (5.60) \\ d_j^+ \geq 0, \ d_j^- \geq 0, \ j = 1,...k, & (5.61) \end{cases}$$

Ainsi on peut facilement résoudre le programme linaire définit par (5.57) à (5.61) qui contient $2k$ variables et $n+3k$ contraintes.

Extensions du modèle

a) Contraintes sur l'importance absolue d'un ensemble de critères

La majorité des analyses de sensibilité supposent que les poids des critères sont des variables indépendantes. Toutefois, dans des situations de décision réelles cette propriété reste toujours difficile à vérifier. En effet, on peut inclure la dépendance d'un sous-ensemble de critères dans la formulation mathématique développée dans la section précédante. Soient C l'ensemble des critères et S un sous-ensemble de C. Si la somme des poids des critères de S doit être maintenue constante, alors on aura l'égalité suivante :

$$\sum_{j \in S} \pi_j = \sum_{j \in S} \pi_j' \qquad (5.62)$$

En utilisant (5.56), on doit ajouter au programme linéaire la contrainte suivante :

$$\sum_{j \in S} (d_j^+ - d_j^-) = 0 \qquad (5.63)$$

b) Contraintes sur l'importance relative d'un ensemble de critères

Le décideur peut aussi vouloir que l'importance relative de deux ou d'un sous-ensemble de critères doit être maintenue constante. Ce jugement peut être exprimé pour deux critères d'indices respectives j_0 et j_1 de la manière suivante :

$$\frac{\pi_{j_0}}{\pi_{j_1}} = \frac{\pi'_{j_0}}{\pi'_{j_1}} \qquad (5.64)$$

Cette dernière relation est transformée en une contrainte linéaire puis inclus dans le programme formulé dans (5.57) à (5.61), soit :

$$\pi_{j_0}(d^+_{j_0} - d^-_{j_0}) = \pi_{j_1}(d^+_{j_1} - d^-_{j_1}) \qquad (5.65)$$

c) Les coefficients de coûts dans la fonction objectif

En observant la formulation de la fonction objectif (5.57), les modifications de valeurs des poids sont supposées équiprobables. Par conséquent, leurs contributions à la fonction objectif sont égales. Cependant, dans des cas pratiques le décideur peut juger que les modifications de certains poids sont plus acceptables que d'autres. Pour tenir compte de cet effet, on introduit des coefficients de coûts dans la fonction objective de la façon suivante :

$$Min \sum_{j=1}^{k} (c^+_j d^+_j + c^-_j d^-_j) \qquad (5.66)$$

Les coefficients c^+_j et c^-_j sont des nombres positifs qui représentent respectivement le coût d'augmentation et de diminution de la valeur de π_j.

d) Des bornes sur les valeurs des poids

Dans quelques cas, le décideur peut spécifier des bornes sur les valeurs des poids. Par exemple pour un critère j :

$$\pi^{lo}_j \leq \pi_j \leq \pi^{hi}_j \qquad (5.67)$$

On peut alors introduire cette contrainte dans le programme linéaire en ajoutant les inégalités suivantes :

$$d^-_j \leq \pi_j - \pi^{lo}_j \qquad (5.68)$$

$$d_j^+ \leq \pi_j^{Ni} - \pi_j \qquad (5.69)$$

Dans ce cas, il possible de tester si une action peut être classée première sujet à des contraintes (des intervalles) sur les valeurs des poids.

On peut conclure que ces analyses de sensibilité concernant les poids des critères pourraient être implantées dans le CESA puisque l'exploitation des relations de surclassement dans la procédure PAMSSEM se fait selon PROMETHÉE I et II. Il semble que la seule difficulté qui peut se présenter dans ces analyses de sensibilité et celle reliée à la proposition de Wolters et Mareschal (1995) pour déterminer la modification minimale nécessaire des poids des critères afin de permettre à une action donnée d'avoir le premier rang dans le rangement. En effet, pour opérationnaliser ce dernier type d'analyse de sensibilité on doit faire appel à un module externe de la programmation linéaire (ex. logiciel : Lindo, Siplex, etc.) pour résoudre le programme linéaire (5.57) ainsi que ses extensions.

5.4. Analyse de sensibilité sur les seuils de discrimination

Il n'y a pas que les coefficients d'importance relative des critères qui sont déterminés de manière subjective, il y a également les valeurs des seuils de discrimination. Malheureusement, on ne trouve pas dans la littérature sur l'aide multicritère de plan systématique pour effectuer une bonne analyse de sensibilité à ce niveau.

La plupart des publications portant sur l'utilisation d'une PAMC de type surclassement de synthèse consacre une partie de leur papier à cette question. Toutefois, ce que l'on y retrouve généralement c'est la mise en œuvre d'une analyse ad hoc et relativement partielle (ex. Hokkanen et Salminen, 1997).

Nous proposons dans un premier temps de faire varier simultanément tous les seuils en plus et moins (de manière progressive) d'un certain pourcentage de leur valeur initiale et de vérifier si les résultats (rangements) ont changé. Selon les changements observés, nous proposons ensuite d'y aller par critère et cela pour les critères relativement les plus importants et/ou comportant le plus d'incertitude au niveau de l'évaluation des suites d'actions. Nous

proposons également de faire ce genre d'analyse pour les seuils des critères associés à un facteur particulier.

Nous devons toutefois faire remarquer que pour le CESA il y a plusieurs critères ordinaux et que pour ceux-la nous n'avons pas défini de seuils de discrimination.

6. Module explicatif des résultats de la procédure PAMSSEM

Généralement, la manière d'expliquer les résultats d'une procédure d'agrégation multicritère est souvent traitée d'une façon superficielle. En effet, il est important de bien présenter puis d'expliquer les résultats conduisant à une recommandation afin d'éliminer l'aspect " boîte noire" caractérisant la majorité des PAMC. Dans cette section nous présentons donc quelques images écrans pouvants aider d'une part à mieux comprendre les résultats obtenus de l'application de la procédure PAMSSEM, et d'autre part à visualiser l'impact de certaines analyses de sensibilité sur ces résultats.

Dans notre présentation du module explicatif nous organisons cette section de la façon suivante : nous commençons par présenter des images écrans globales (les différents préordres : PROM I et II), ensuite des images écrans plus détaillés (tableau multicritère incluant les seuils de discrimination, graphiques représentant les données et les résultats de la procédure PAMSSEM : représentation en "Radar" des actions sur des critères préalablement choisis, représentation en deux dimensions des flux sortant et entrant pour chaque action, etc.), enfin des images écrans pour répondre à des "pourquoi" que l'utilisateur peut se poser (les différents types d'analyses de sensibilité).

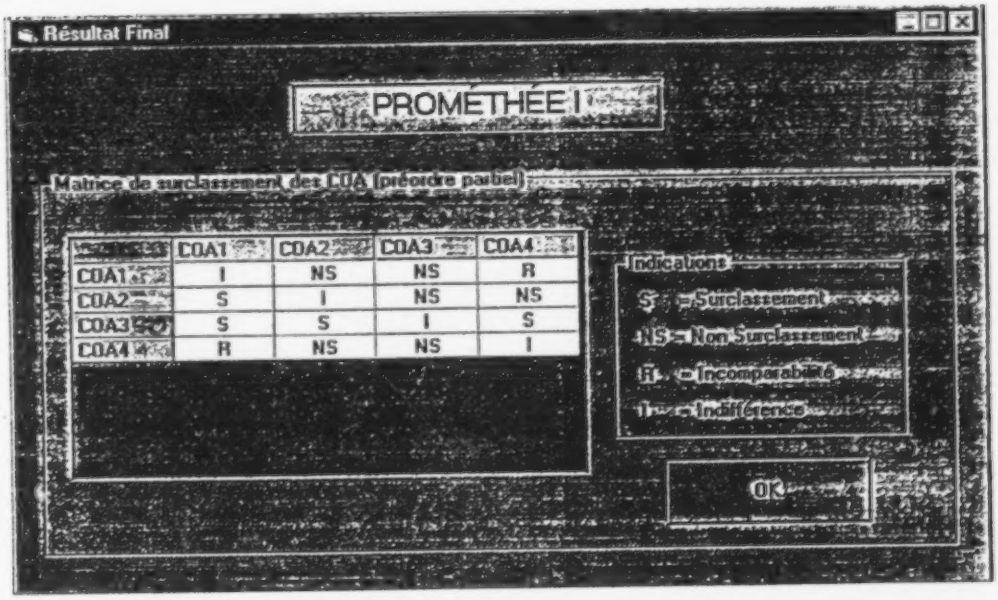
6.1. Les images écrans de présentation globales

Dans un premier temps, on présente globalement les résultats de la procédure PAMSSEM selon qu'ils ont été obtenus d'une exploitation à la PROMÉTHÉE I ou II.

1. Un préordre partiel obtenu de la méthode PROMÉTHÉE I, dans lequel on accepte les situations d'incomparabilité entre les actions. Dans la matrice de surclassement,

les situations d'incomparabilité sont représentées par la lettre « R », alors que celles de surclassement sont représentées par la lettre « S » (voir écran 1).

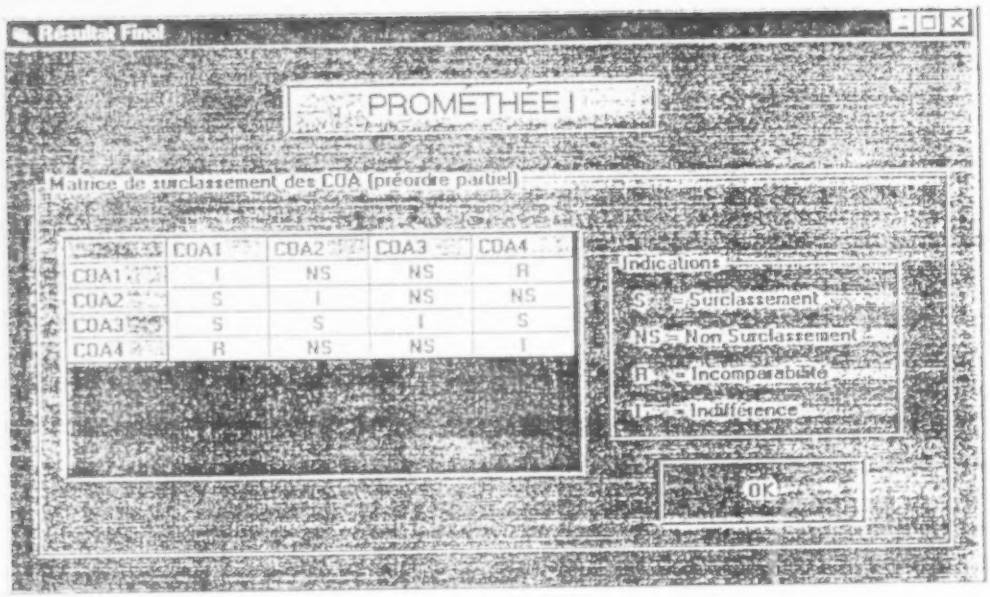
2. Un préordre total obtenu de la méthode PROMÉTHÉE II, dans lequel on range les actions (dont les noms figurent dans le premier tableau à gauche) dans l'ordre décroissant de leur bilan de flux (dernier tableau à droite). Dans, les deux tableaux intermédiaires on présente, pour chaque action, les flux sortant et entrant (voir écran 2).



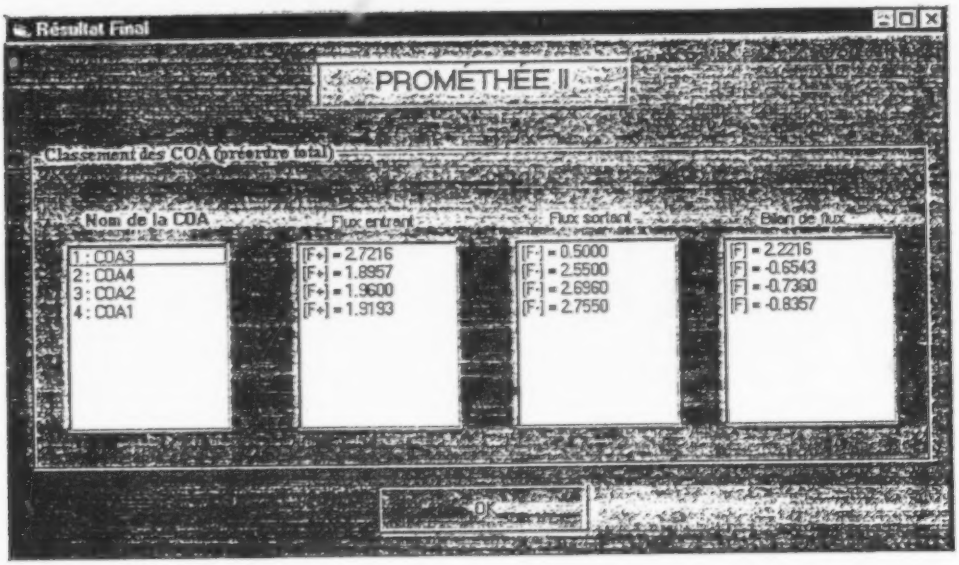
Écran 1 : Le préordre partiel selon PROMÉTHÉE I.

les situations d'incomparabilité sont représentées par la lettre « R », alors que celles de surclassement sont représentées par la lettre « S » (voir écran 1).

2. Un préordre total obtenu de la méthode PROMÉTHÉE II, dans lequel on range les actions (dont les noms figurent dans le premier tableau à gauche) dans l'ordre décroissant de leur bilan de flux (dernier tableau à droite). Dans, les deux tableaux intermédiaires on présente, pour chaque action, les flux sortant et entrant (voir écran 2).

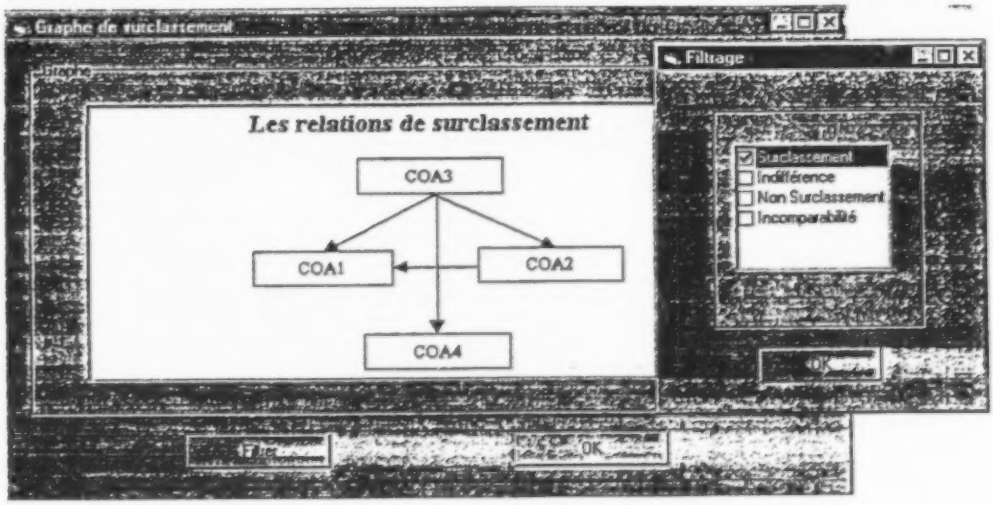


Écran 1 : Le préordre partiel selon PROMÉTHÉE I.

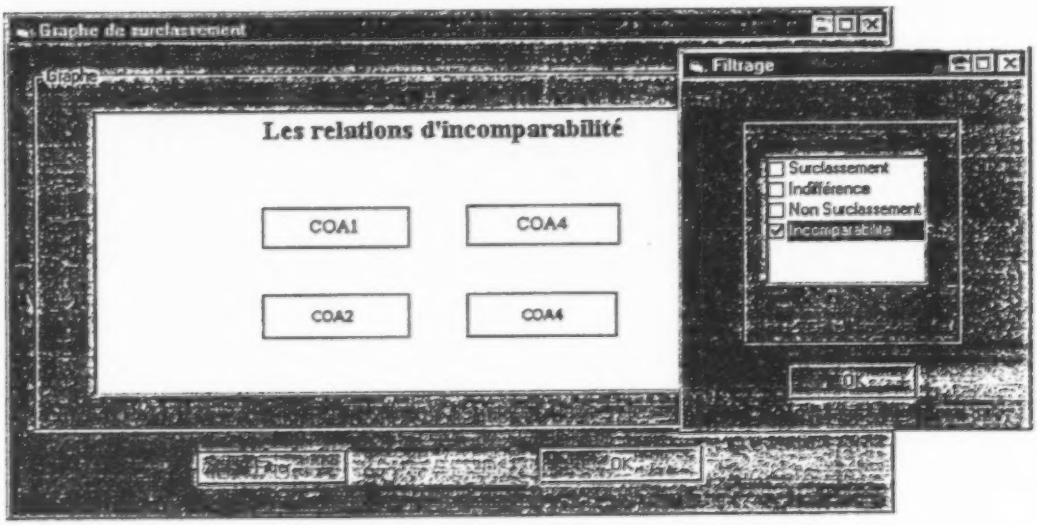


Écran 2 : Le préordre total selon PROMÉTHÉE II.

La matrice de surclassement à la PROMÉTHÉE I peut être aussi représentée par un graphe de surclassement dans lequel on traduit chaque relation entre deux actions par un type de flèche. Par exemple, une relation de surclassement peut être représentée par une flèche pleine à un sens unique, une relation d'indifférence par une flèche pleine mais à double sens, etc. L'absence de flèche entre deux actions indique une incomparabilité entre celles-ci. Dans le graphe de surclassement on offre la possibilité soit de représenter l'ensemble de toutes ces relations, soit de filtrer certains types d'entre elles (Voir Écran 3 et 4).

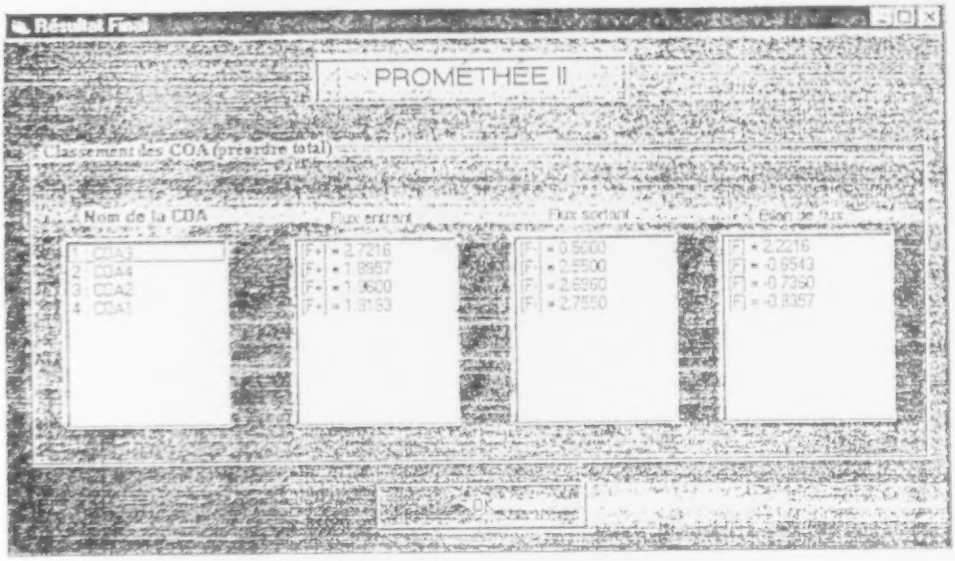


Écran 3 : Un graphe représentant les relations de surclassement.



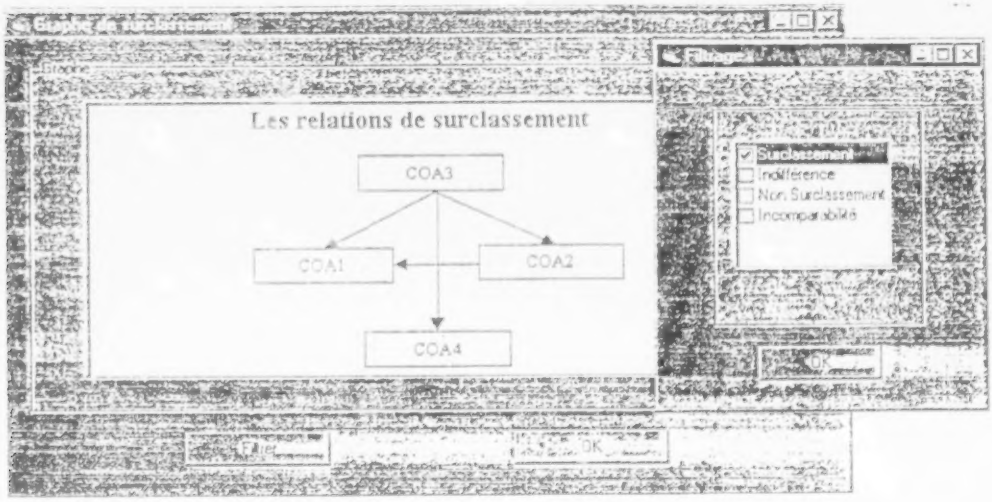
Écran 4 : Un graphe représentant les relations d'incomparabilité.

Les résultats de PROMÉTHÉE II. peuvent être représentés soit sous forme d'histogrammes comme le montre l'écran 5 (dans cette figure on peut voir clairement l'amplitude des bilans de flux de chaque COA), soit sur un axe dans lequel on indique la position de chaque COA selon son bilan de flux (voir l'écran 6).

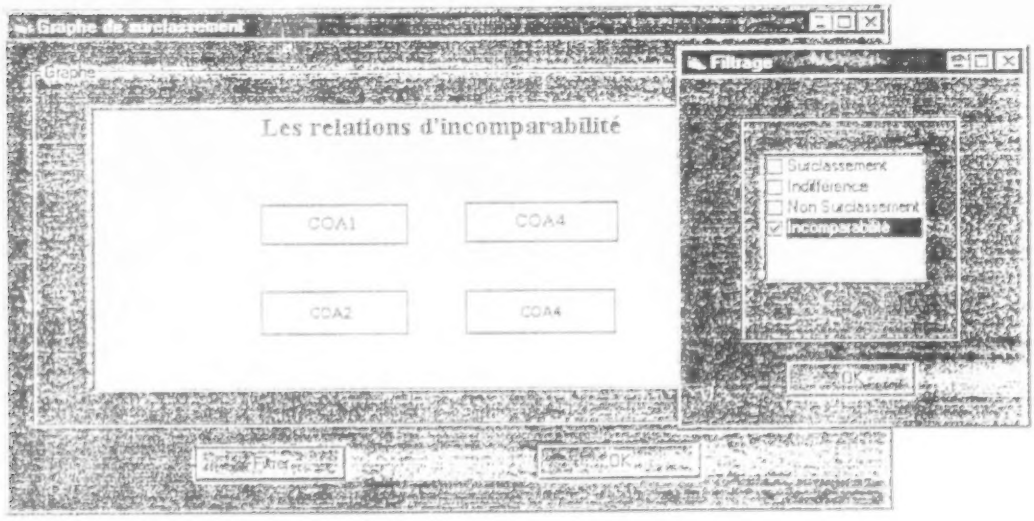


Écran 2 : Le préordre total selon PROMÉTHÉE II.

La matrice de surclassement à la PROMÉTHÉE I peut être aussi représentée par un graphe de surclassement dans lequel on traduit chaque relation entre deux actions par un type de flèche. Par exemple, une relation de surclassement peut être représentée par une flèche pleine à un sens unique, une relation d'indifférence par une flèche pleine mais à double sens, etc. L'absence de flèche entre deux actions indique une incomparabilité entre celles-ci. Dans le graphe de surclassement on offre la possibilité soit de représenter l'ensemble de toutes ces relations, soit de filtrer certains types d'entre elles (Voir Écran 3 et 4).

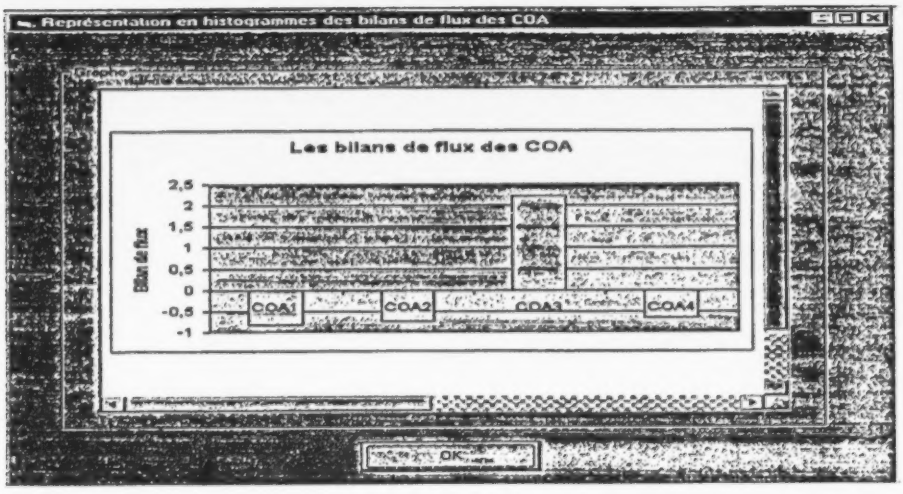


Écran 3 : Un graphe représentant les relations de surclassement.

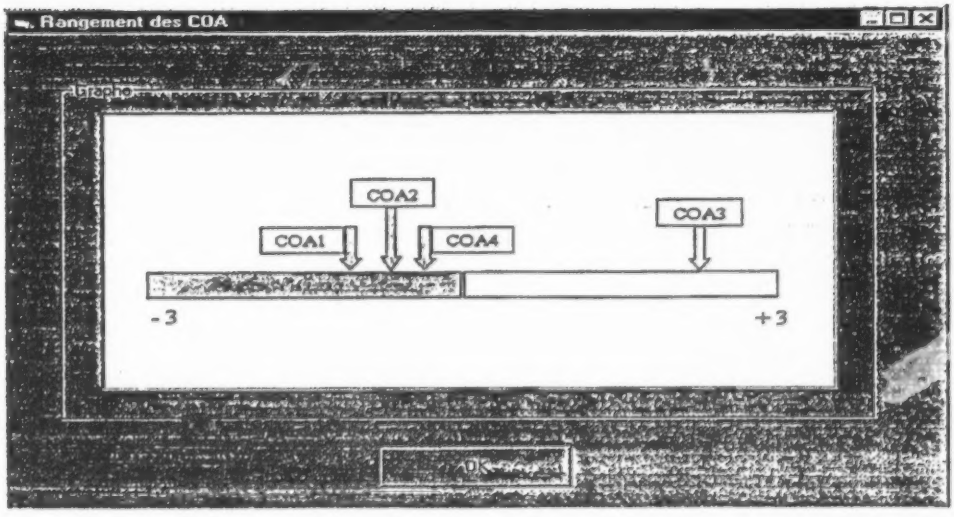


Écran 4 : Un graphe représentant les relations d'incomparabilité.

Les résultats de PROMÉTHÉE II peuvent être représentés soit sous forme d'histogrammes comme le montre l'écran 5 (dans cette figure on peut voir clairement l'amplitude des bilans de flux de chaque COA), soit sur un axe dans lequel on indique la position de chaque COA selon son bilan de flux (voir l'écran 6).



Écran 5 : Représentation en histogrammes des bilans de flux des COA

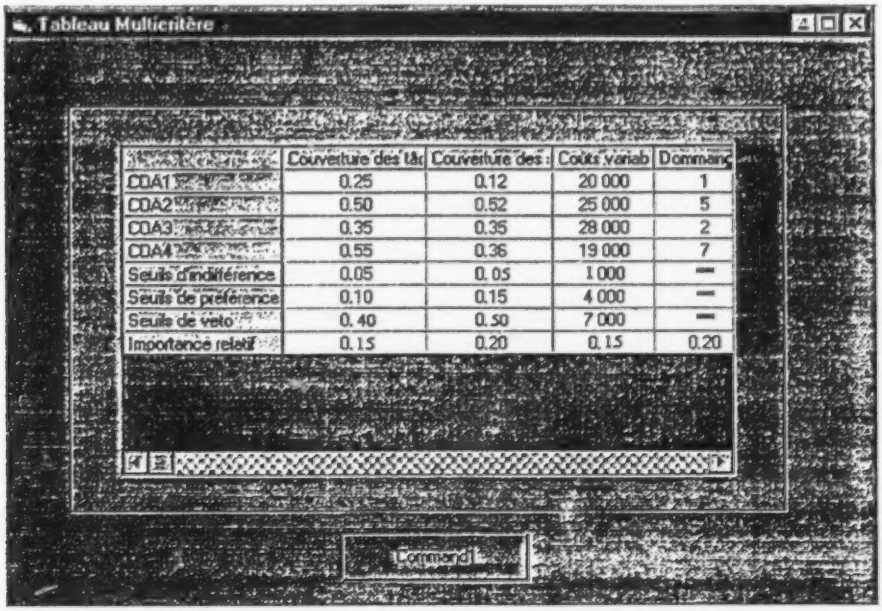


Écran 6 : Un graphique représentant le rangement des COA selon leur bilans de flux

6.2. *Les images écran de présentation détaillée*

Comme toute autre procédure de surclassement de synthèse, PAMSSEM part d'un tableau multicritère contenant les actions, les critères, les évaluations des actions selon les différents critères, les seuils de discrimination et enfin les importances relatives des critères

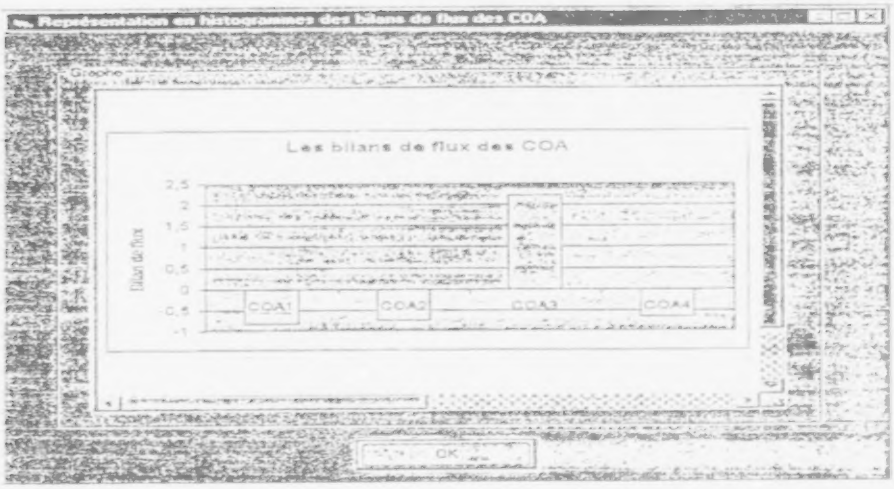
(voir écran 7). La visualisation de ces données peut être, plus ou moins, utile à l'utilisateur afin de justifier certains résultats de la procédure d'agrégation.



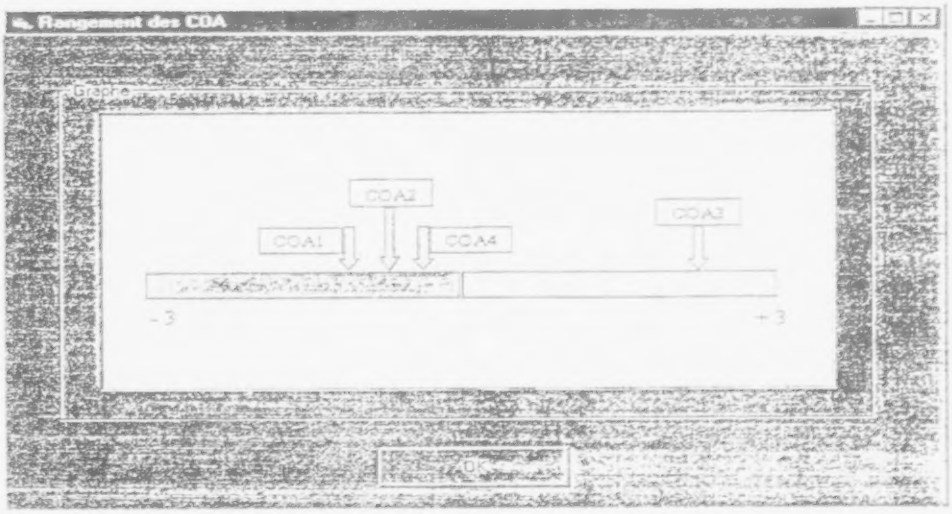
Écran 7 : le tableau multicritères.

En fait, PAMSSEM fournit quelques résultats intermédiaires avant de donner la matrice de surclassement ou le rangement final. Ces résultats qui sont la matrice de concordance, les matrices de discordances ainsi que la matrice de surclassement doivent être présentés à l'utilisateur à sa guise en lui offrant la possibilité d'examiner les détails de calcul de chaque case de ces matrices. Si par exemple on présente à l'utilisateur la matrice de surclassement (voir Écran 8), on lui permettra de voir, pour chaque couple d'actions de cette matrice, le nombre de critères concordants et discordants, les libellés de ces critères ainsi que les degrés de surclassement au niveau de chaque critère (voir Écran 9).

N.B. Le détail de calcul du degré de surclassement dans l'écran 9 ne correspond pas aux données du tableau multicritère représenté par l'écran 7. En effet, l'objectif de l'écran 9 est juste de montrer les détails du calcul du degré de surclassement que l'on peut donner à l'utilisateur.



Écran 5 : Représentation en histogrammes des bilans de flux des COA

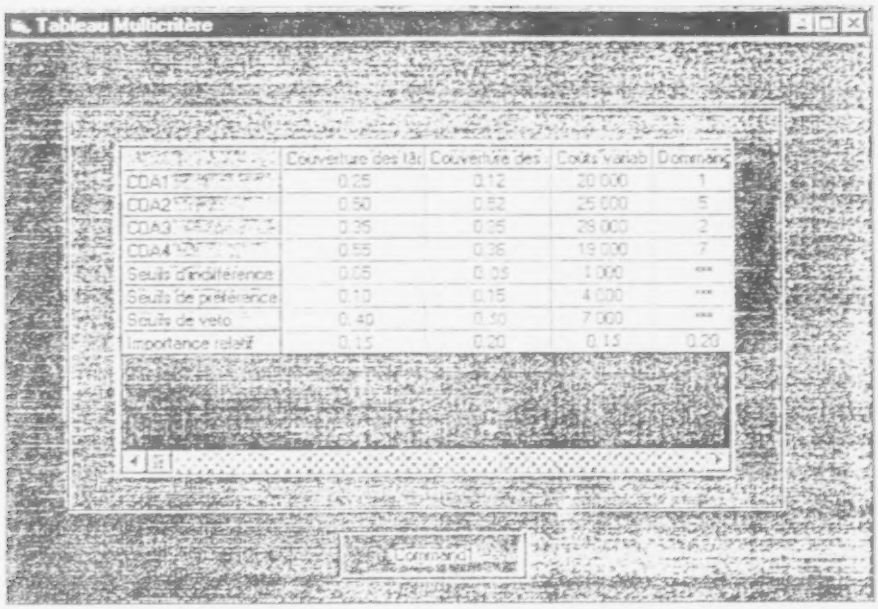


Écran 6 : Un graphique représentant le rangement des COA selon leur bilans de flux

6.2. Les images écran de présentation détaillée

Comme toute autre procédure de surclassement de synthèse, PAMSSEM part d'un tableau multicritère contenant les actions, les critères, les évaluations des actions selon les différents critères, les seuils de discrimination et enfin les importances relatives des critères

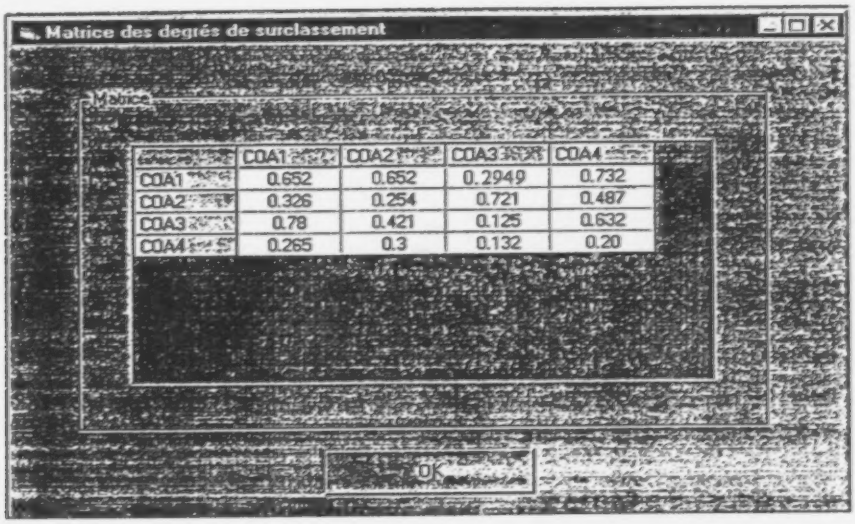
(voir écran 7). La visualisation de ces données peut être, plus ou moins, utile à l'utilisateur afin de justifier certains résultats de la procédure d'agrégation.



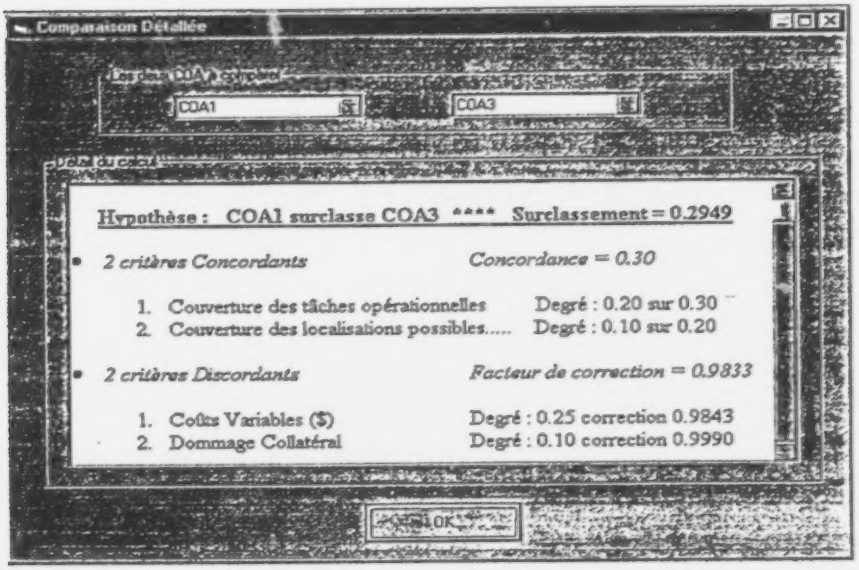
Écran 7 : le tableau multicritères.

En fait, PAMSSEM fournit quelques résultats intermediaires avant de donner la matrice de surclassement ou le rangement final. Ces résultats qui sont la matrice de concordance, les matrices de discordances ainsi que la matrice de surclassement doivent être présentés à l'utilisateur à sa guise en lui offrant la possibilité d'examiner les détails de calcul de chaque case de ces matrices. Si par exemple on présente à l'utilisateur la matrice de surclassement (voir Écran 8), on lui permettra de voir, pour chaque couple d'actions de cette matrice, le nombre de critères concordants et discordants, les libellés de ces critères ainsi que les degrés de surclassement au niveau de chaque critère (voir Écran 9).

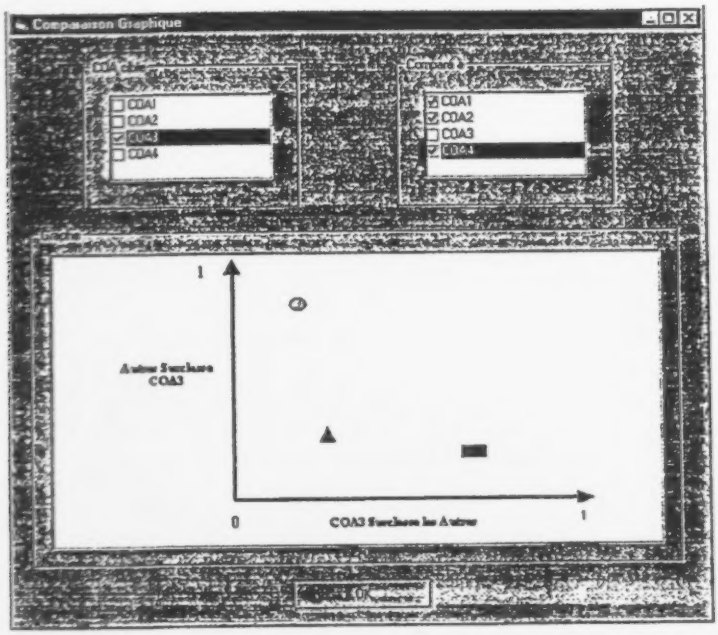
N.B. Le détail de calcul du degré de surclassement dans l'écran 9 ne correspond pas aux données du tableau multicritère représenté par l'écran 7. En effet, l'objectif de l'écran 9 est juste de montrer les détails du calcul du degré de surclassement que l'on peut donner à l'utilisateur.



Écran 8 : matrice des degrés de surclassement



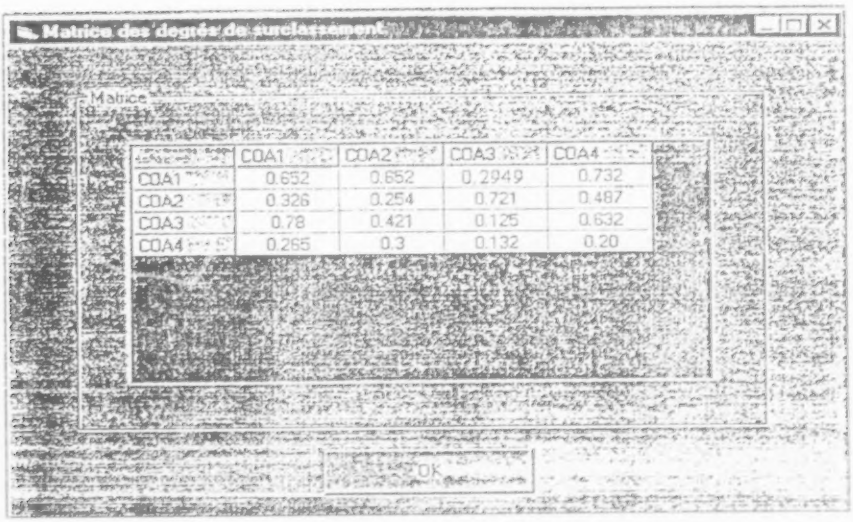
Écran 9 : détail du calcul du degré de surclassement



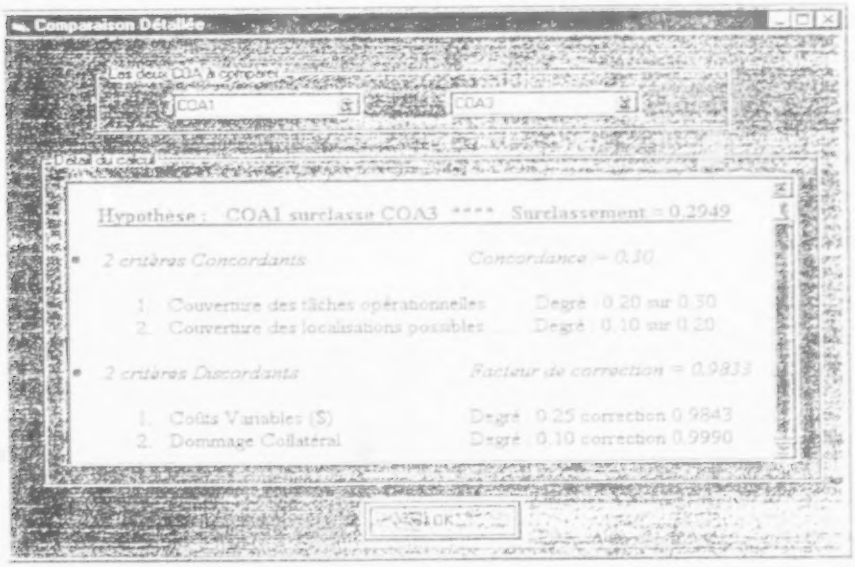
Écran 10 : Comparaison graphique des degrés de surclassement.

L'objectif de la représentation graphique des degrés de surclassement d'une action cible (COA3) en fonction des autres actions (ou d'une seul action) (écran 10), c'est de mieux visualiser les valeurs contenues dans la matrice des degrés de surclassement afin de pouvoir par la suite expliquer pourquoi une telle action est si bien (ou si mal) classée par rapport à une autre dans le rangement final.

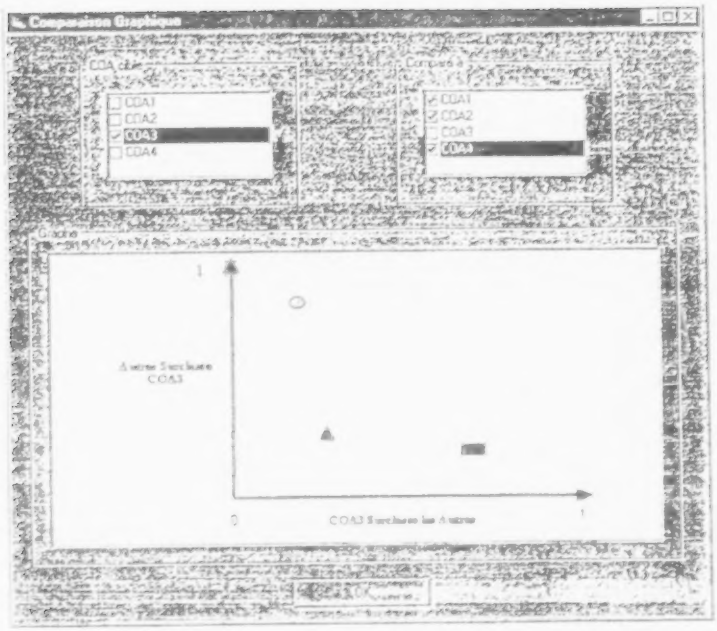
L'exploitation des relations de surclassement dans la procédure PAMSSEM repose principalement sur la notion de flux entrant et sortant de la méthode PROMÉTHÉE. En effet, chaque action peut être représentée par un point dans un repère à deux dimensions (voir écran 11) (l'axe des abscisses représente le flux entrant et l'axe des ordonnés représente le flux sortant). Donc, à partir de ce graphique, on peut retrouver l'ensemble des actions les plus "satisfaisantes" dans le cadran haut et gauche du repère.



Écran 8 : matrice des degrés de surclassement



Écran 9 : détail du calcul du degré de surclassement

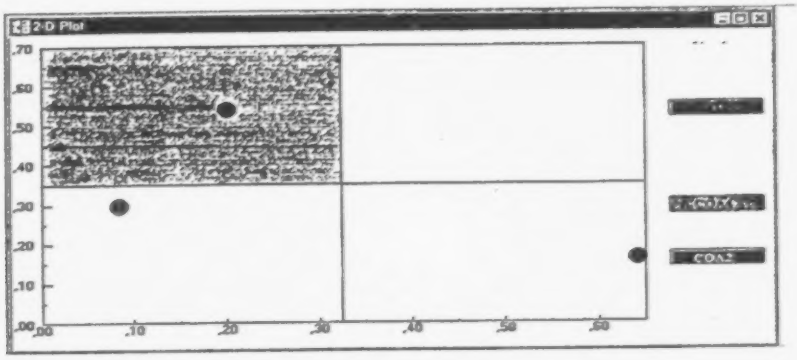


Écran 10 : Comparaison graphique des degrés de surclassement.

L'objectif de la représentation graphique des degrés de surclassement d'une action cible (COA3) en fonction des autres actions (ou d'une seul action) (écran 10), c'est de mieux visualiser les valeurs contenues dans la matrice des degrés de surclassement afin de pouvoir par la suite expliquer pourquoi une telle action est si bien (ou si mal) classée par rapport à une autre dans le rangement final.

L'exploitation des relations de surclassement dans la procédure PAMSSEM repose principalement sur la notion de flux entrant et sortant de la méthode PROMÉTHÉE. En effet, chaque action peut être représentée par un point dans un repère à deux dimensions (voir écran 11) (l'axe des abscisses représente le flux entrant et l'axe des ordonnés représente le flux sortant). Donc, à partir de ce graphique, on peut retrouver l'ensemble des actions les plus "satisfaisantes" dans le cadran haut et gauche du repère.

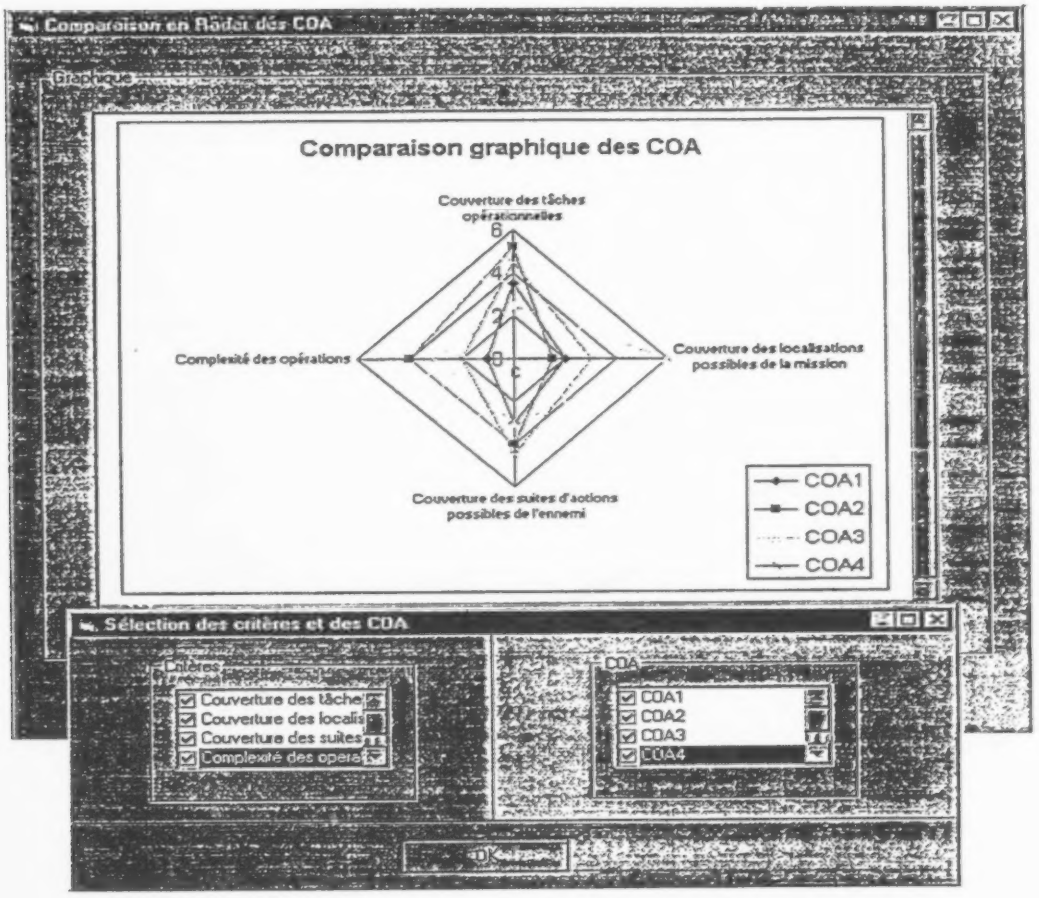
$\Phi^+(COA_i)$



$\Phi^-(COA_i)$

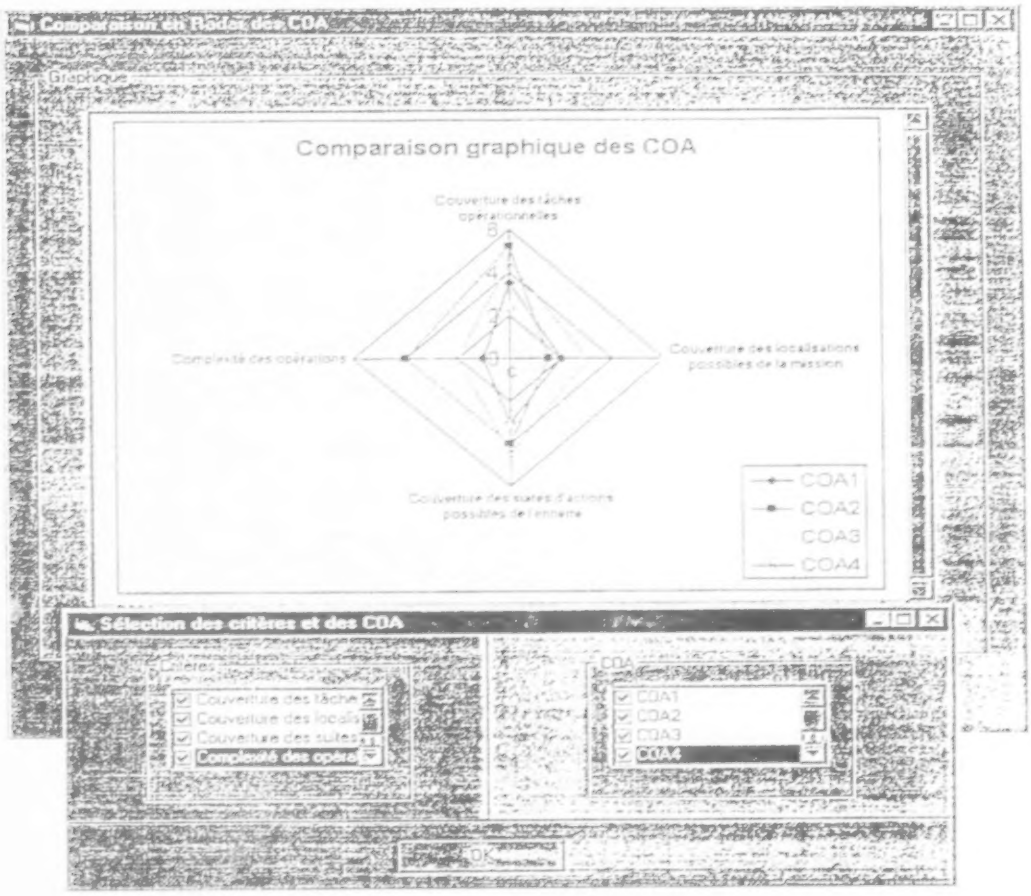
Écran 11 : Représentation 2-D des flux sortant et entrant des COA

Dans la littérature sur les systèmes interactifs d'aide multicritère à la décision, plusieurs façons ont été proposées pour mieux visualiser les performances des actions selon des différents critères conflictuels (Yee et Niall, 1998; Pomerol et Barba-Romero, 1993). En effet, la représentation la plus couramment utilisée est celle de radar (voir Écran 12). Dans cette représentation, les critères forment les axes d'un repère multidimensionnel et chaque action est représentée par un ensemble de points selon ces différents critères tout en tenant compte de leur aspect conflictuel. La description graphique proposée dans l'écran 12 offre à l'utilisateur la flexibilité de choisir lui même l'ensemble des critères et des actions qu'il veut représenter. En fait, cette façon de représenter les choses permet, parfois, d'identifier facilement les actions "dominées" (dans le cas où le critère est à minimiser, on inverse le signe des évaluations des actions sur ce critère). Dans le cadre du projet CESA, les évaluations des COA sur certains critères sont distributionnelles, alors dans ce cas on peut représenter graphiquement cette distribution par sa moyenne ou une autre mesure caractéristique.



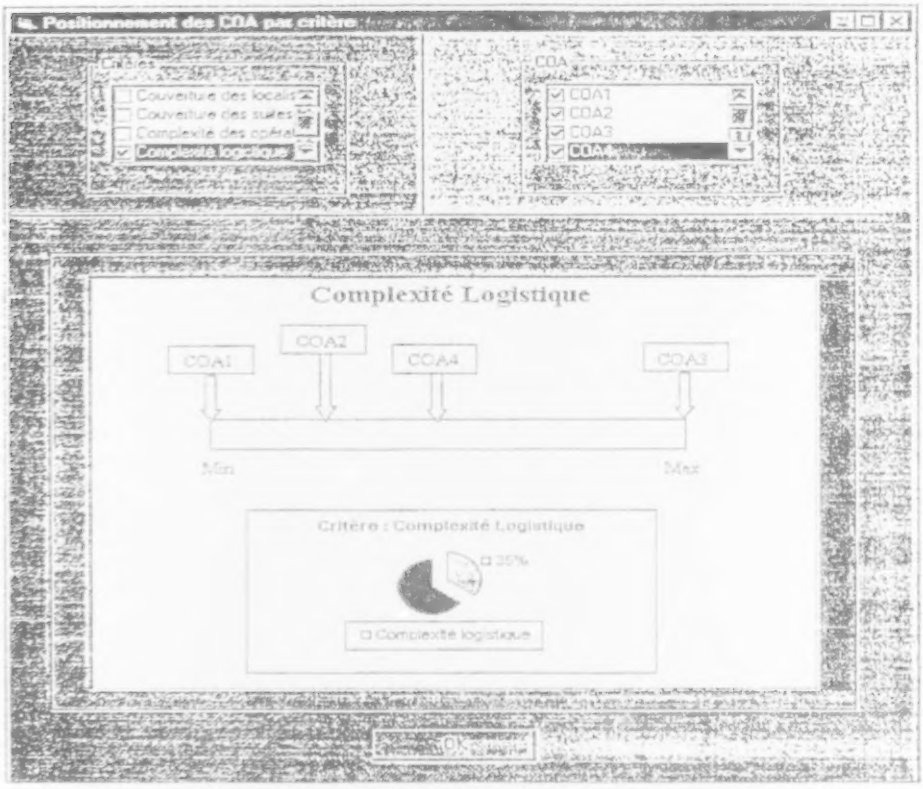
Écran 12 : Visualisation des COA selon la représentation "Radar"

On peut offrir à l'utilisateur un outil graphique permettant de visualiser la position d'un ensemble de COA sur un ou plusieurs critères (voir écran 13). En effet, cet outil n'est qu'une interprétation graphique des données contenues dans le tableau multicritère pour mieux voir les performances de chaque COA sur les différents critères.



Écran 12 : Visualisation des COA selon la représentation "Radar"

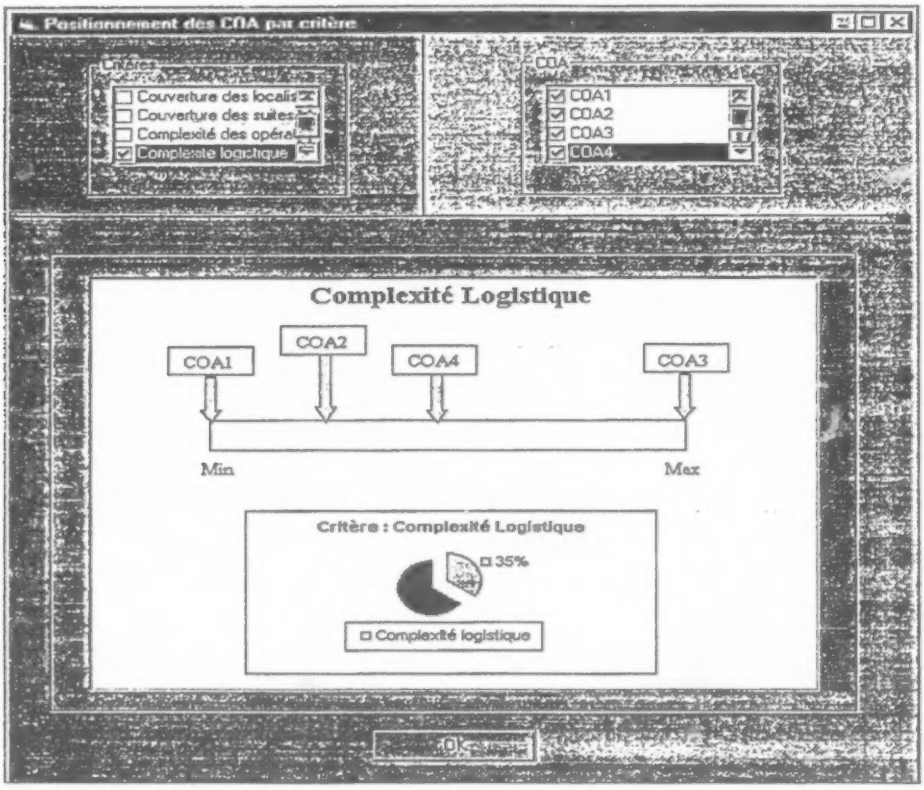
On peut offrir à l'utilisateur un outil graphique permettant de visualiser la position d'un ensemble de COA sur un ou plusieurs critères (voir écran 13). En effet, cet outil n'est qu'une interprétation graphique des données contenues dans le tableau multicritère pour mieux voir les performances de chaque COA sur les différents critères.



Écran 13 : positionnement des COA sur un ou plusieurs critères

6.3. Les images écran pour les analyses de sensibilité

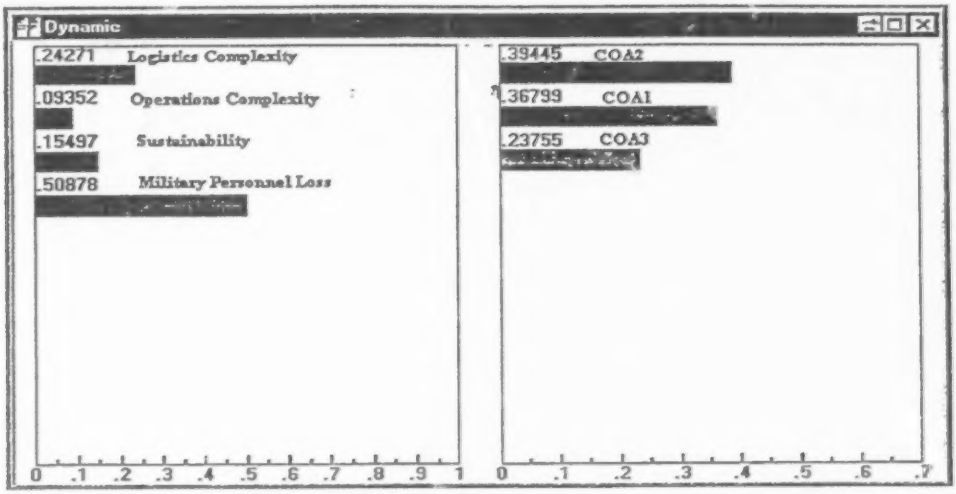
Dans la rubrique de l'analyse de sensibilité sur les poids des critères, on présente dans l'écran 14 l'importance relative des critères sous forme d'histogrammes horizontaux (le cadran à gauche) et le bilan de flux de l'ensemble des COA (le cadran à droite). La modification graphique, à l'aide de la souris, de la longueur des histogrammes symbolisant les poids relatifs permettra devoir l'impact d'une telle modification sur le bilan de flux des COA.



Écran 13 : positionnement des COA sur un ou plusieurs critères

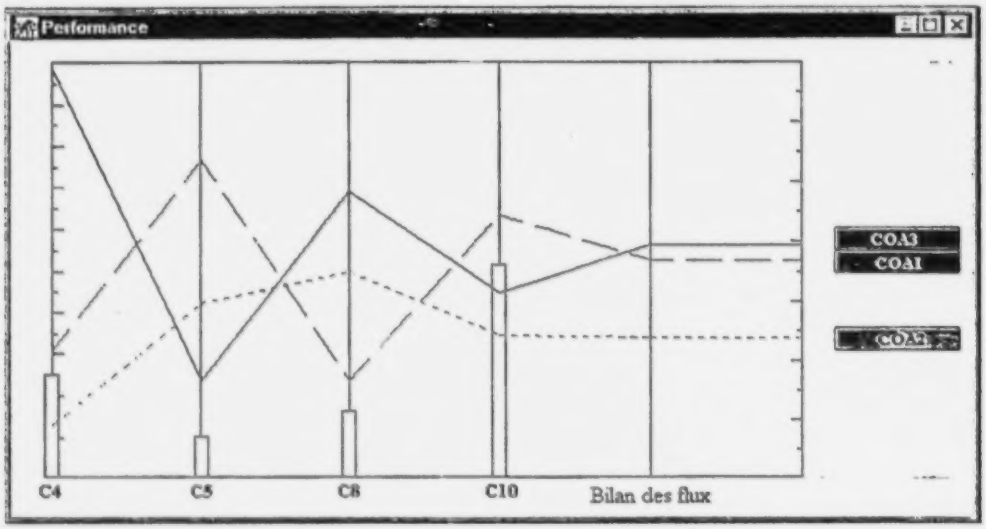
6.3. *Les images écran pour les analyses de sensibilité*

Dans la rubrique de l'analyse de sensibilité sur les poids des critères, on présente dans l'écran 14 l'importance relative des critères sous forme d'histogrammes horizontaux (le cadran à gauche) et le bilan de flux de l'ensemble des COA (le cadran à droite). La modification graphique, à l'aide de la souris, de la longueur des histogrammes symbolisant les poids relatifs permettra devoir l'impact d'une telle modification sur le bilan de flux des COA.



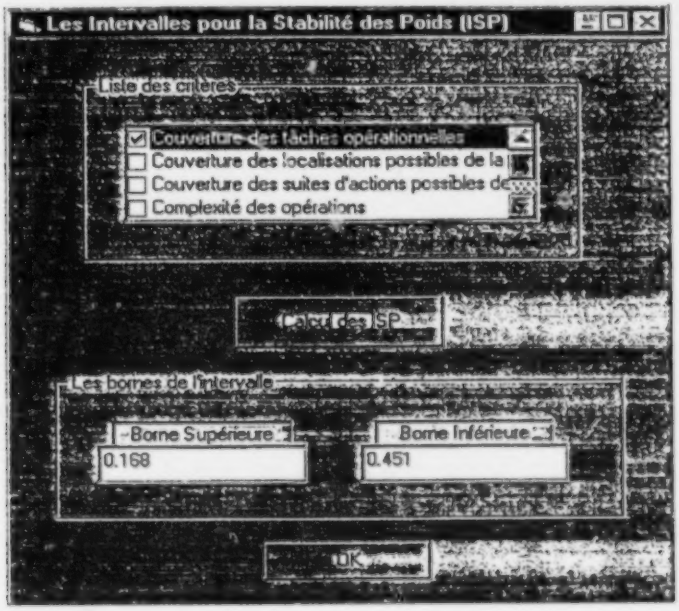
Écran 14 : Analyse de sensibilité sur les poids des critères

On peut représenter graphiquement les performances de l'ensemble ou d'un sous-ensemble d'actions sur chacun des critères d'une part, et d'autre part on peut voir le rangement final de ces actions selon le préordre total de la méthode PROM II. (voir Écran 15). En effet, dans le graphique de l'écran 15, chaque critère est représenté par une échelle (pas une échelle commune) sur laquelle on représente les évaluations des différentes actions. L'importance relative de chaque critère est représentée par un histogrammes superposé sur l'échelle qui lui est associée. En effet, à partir de cet écran on peut effectuer une analyse de sensibilité sur les évaluations d'une action sur un critère donné. En fait, si on modifie le(s) évaluations(s) de l'action "COA_i" sur l'un des quatre critères (qui figurent sur l'axe des abscisses), on peut voir l'influence d'un tel changement sur le rangement final de cet action dans la partie droite de l'écran 15. En effet, l'image écran 15 n'est que la mise en œuvre de l'analyse de sensibilité soulevé par Wolters et Mareschal (1995) pour déterminer l'influence des évaluations de quelques actions sur certains critères (dans l'écran 15, les critères C_i, i = 4, 5, 8 et 10 sont ceux identifiés dans le cadre du projet CESA).

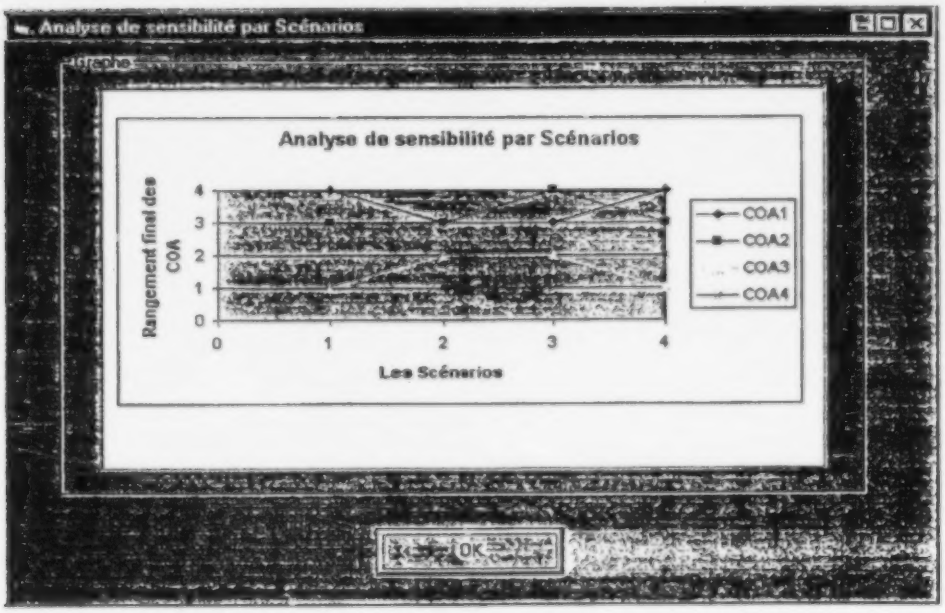


Écran 15 : analyse de sensibilité sur les évaluations des COA.

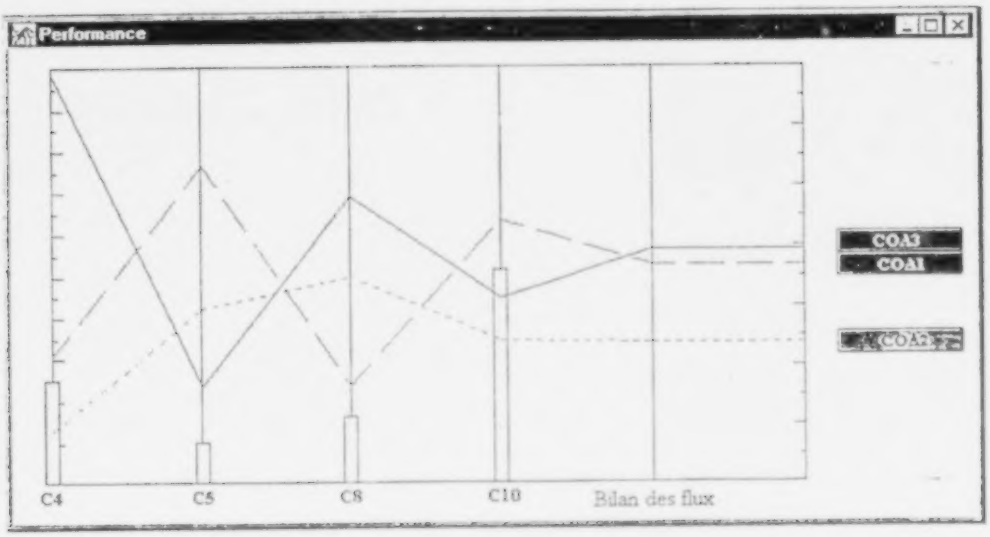
Dans la rubrique de l'analyse de sensibilité, on peut construire des intervalles sur le poids d'un critère ou d'un sous-ensemble de critères à l'intérieur desquels on assure la stabilité du rangement final des actions (voir Écran 16). En effet, on considère qu'à l'intérieur de ces intervalles le rangement final de la *totalité* des actions reste inchangé. Dans ce cas on parle d'une stabilité total car cette stabilité concerne l'ensemble des actions. L'utilisateur n'a donc qu'à spécifier le critère (ou le sous-ensemble de critères) en question puis cliquer sur le bouton "ISP" pour voir les bornes de ces intervalles (voir Écran 16). En fait, cette analyse de sensibilité peut être généralisée de façon à étudier la variation de poids de(s) critère(s) sur seulement un sous-ensemble de l'ensemble des actions. Dans ce cas on parlera d'une stabilité partielle.



Écran 16 : Construction d'intervalles de stabilité pour les poids des critères

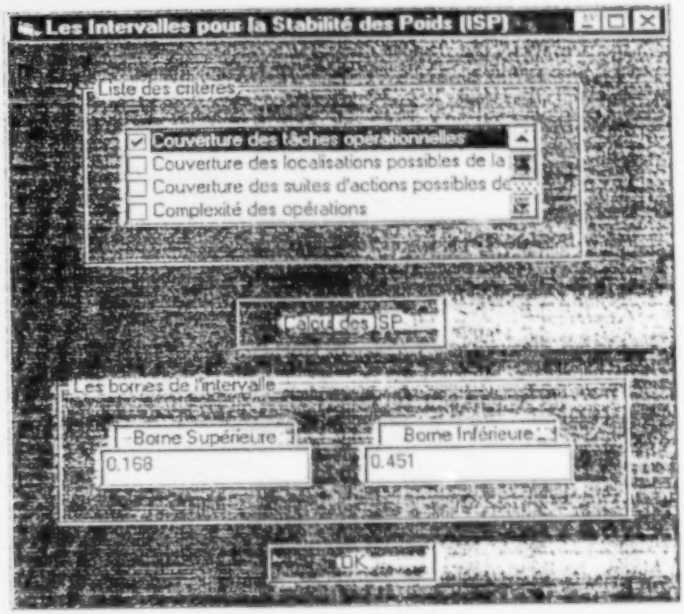


Écran 17 : Analyse de sensibilité par scénarios.

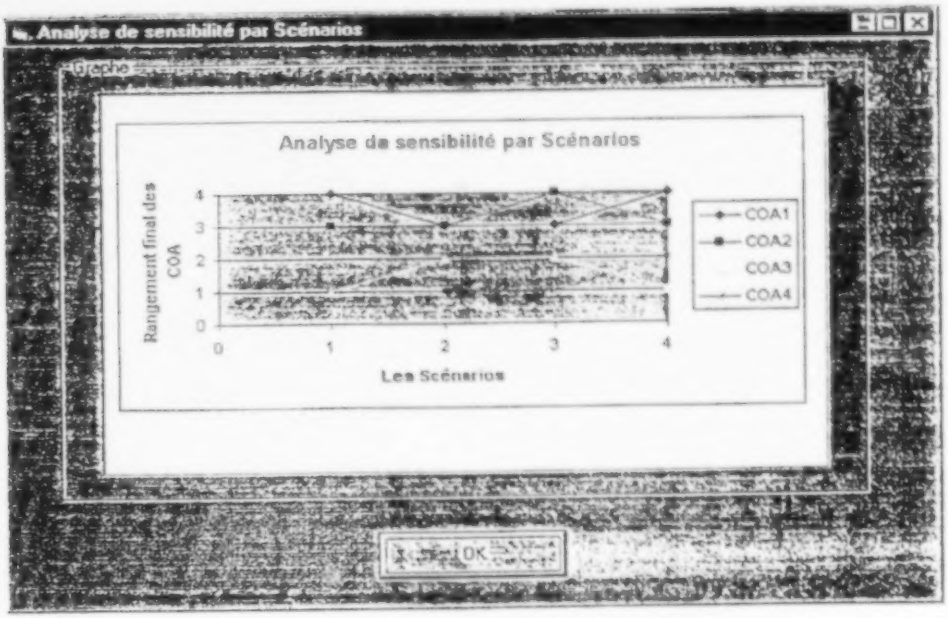


Écran 15 : analyse de sensibilité sur les évaluations des COA.

Dans la rubrique de l'analyse de sensibilité, on peut construire des intervalles sur le poids d'un critère ou d'un sous-ensemble de critères à l'intérieur desquels on assure la stabilité du rangement final des actions (voir Écran 16). En effet, on considère qu'à l'intérieur de ces intervalles le rangement final de la *totalité* des actions reste inchangé. Dans ce cas on parle d'une stabilité total car cette stabilité concerne l'ensemble des actions. L'utilisateur n'a donc qu'à spécifier le critère (ou le sous-ensemble de critères) en question puis cliquer sur le bouton "ISP" pour voir les bornes de ces intervalles (voir Écran 16). En fait, cette analyse de sensibilité peut être généralisée de façon à étudier la variation de poids de(s) critère(s) sur seulement un sous-ensemble de l'ensemble des actions. Dans ce cas on parlera d'une stabilité partielle.



Écran 16 : Construction d'intervalles de stabilité pour les poids des critères



Écran 17 : Analyse de sensibilité par scénarios.

Un autre type d'analyse de sensibilité peut être effectué par l'élaboration d'un ensemble de scénarios établis au moyen de certaines modifications dans les évaluations des actions sur certains critères jugés importants (voir écran 17). En effet, cette façon de faire permet d'exclure les actions qui détiennent, quelque soit le scénario utilisé, les dernières positions ou de garder d'autres actions qui se placent dans les premiers rangs.

7. Conclusions et recommandations

Comme nous l'avons mentionné, ce travail de recherche s'inscrivait dans le prolongement du projet W7701-6-1580 sur la construction d'une famille de critères qui pourraient être utilisés dans un processus d'évaluation de différentes suites d'actions pour protéger l'espace aérien canadien. Dans le cadre de ce projet, nous avons entrepris un processus de validation des critères auprès de Mmes M. Bélanger et I. Abi-Zeid d'une part, et auprès de M. C. Hunter et le Mj. J.F. Beauprés d'autre part. Ce processus a conduit à une reformulation de la famille de critères. Malgré que nous n'avons pas accès directement aux principaux intervenants militaires, nous considérons que cette formulation constitue une bonne base de travail. Afin de lui conférer toute la portée qu'elle devrait avoir et faciliter son acceptation par les décideurs, nous estimons que des travaux de validation, d'explication et d'apprentissage devraient être entrepris auprès de ces derniers. La validation concerne principalement la vérification de la cohérence de la famille de critères[9]. Rappelons que la cohérence comporte trois exigences fondamentales : l'exhaustivité, la cohésion et la non-redondance.

Nous sommes convaincu, par ailleurs, qu'un travail soutenu de présentation, d'exploitation et justification de cette famille de critères devrait faciliter l'adoption et la mise en œuvre de celle-ci pour évaluer les différentes suites d'action présentées dans un contexte de protection de l'espace aérien canadien. La pratique enseigne que les gens ont une certaine résistance aux changements et acceptent difficilement de modifier leurs manières d'opérer. Nous estimons que le rôle de l'aidant, dans ce contexte, est crucial pour introduire les

[9] *Le lecteur est référé au rapport du projet pour une explication plus détaillée, ou encore à Roy et Bouyssou (1993).*

concepts multicritères à des gens qui ne verraient pas nécessairement *a priori* l'importance de l'aide que l'on pourrait leur apporter. C'est à ce moment qu'un travail d'encadrement est pertinent. Il est parfois nécessaire de briser une certaine crainte et de démystifier, pour les décideurs, la terminologie, les concepts et la philosophie de l'aide multicritère à la décision. En résumé, l'implantation des résultats de nos travaux de recherche devrait se faire avec prudence selon les trois volets : explication, validation et apprentissage.

Par ailleurs, nous avons, en compagnie des gens du CRDV, fait a priori des choix pour certaines modélisations plutôt que d'autres. À titre d'exemple, nous avons choisi de construire des échelles ordinales à partir de plusieurs évaluations sur une autre échelle ordinale moins nuancée, ou encore nous avons utilisé des fonctions d'appartenance floue. La question que l'on se pose est celle de savoir si ces choix sont justifiés? Pourquoi avoir construit une nouvelle échelle ordinale à partir d'évaluations ordinales? Est-ce que cette façon de faire est plus justifiée que l'utilisation d'évaluations distributionnelles? Il nous est difficile de répondre d'une façon non équivoque à ces questions. Toutefois, il est important de se positionner par rapport à ces questions avant l'implantation.

Nous avons suggéré d'associer des seuils à certains critères. Ces seuils sont ceux d'indifférence, de préférence, ou même de veto. L'interprétation et l'utilisation de ces seuils n'est pas toujours facile. De plus, malgré l'interprétation intuitive de ces seuils, il est établi que leur détermination pratique et le rôle véritable qu'il joue dans la PAMC n'est pas évident. Est-ce que ces seuils permettent véritablement de tenir compte de l'imperfection de l'information et des hésitations dans les préférences? Si c'est le cas, lorsqu'on choisi d'autres modélisations de l'imperfection de l'information, comment leur valeurs en seraient-elles affectées?

L'imperfection de l'information et les hésitations à exprimer clairement les préférences conduisent à des résultats d'agrégation plus au moins sensibles à des variations de modélisation. Nous avons proposé une approche pour effectuer des analyses de sensibilité d'un résultat en fonction des variations des différents paramètres. Cette proposition conduit à

analyser l'effet des importances relatives des critères et des seuils. Est-ce suffisant? Nous estimons que dans un contexte de décision face au risque, l'on devrait recommander des décisions robustes. C'est ainsi que quelques chercheurs, comme Roy (1997), ont mis de l'avant l'idée de l'analyse de robustesse. Si l'on veut résumer ce nouveau concept, nous pourrons dire que c'est l'idée de déterminer la meilleure solution de compromis compte tenu que l'on tienne compte a priori, au moment de la modélisation, des intervalles de variations possibles des divers paramètres intervenant dans cette modélisation et dont les valeurs sont déterminées de manière subjective. Donc, plutôt que de fixer a priori des valeurs (les plus vraisemblables) pour les paramètres, de trouver une solution et ensuite de faire varier ces valeurs afin de vérifier si cette solution est stable (robuste), nous procédons un peu à l'inverse. La solution ainsi obtenue sera celle du meilleur compromis puisqu'elle aura été obtenue dans le cadre des variations possibles des différents paramètres. Cette idée d'analyse de robustesse est encore une question ouverte dans la littérature. Un travail sérieux de réflexion pourrait conduire éventuellement à une démarche opérationnelle spécifique au cas CESA.

Dans le cadre de ce projet CESA, nous avons toujours supposé que l'ensemble des suites d'actions était connu *a priori.* Or dans un contexte comme celui de la surveillance de l'espace aérien, la phase de construction des suites d'actions peut s'avérer aussi importante, sinon plus, que celle de l'évaluation. Il serait intéressant d'analyser la façon de faire actuelle et éventuellement de proposer une démarche pour aider les opérateurs et le personnel du centre de commandement dans le processus de construction et d'écrémage des suites d'actions. La construction devrait tenir compte des états des ressources disponibles et des changements éventuels de ces états. Ceci exige l'utilisation par exemple de tableaux de bord des systèmes d'information. On pourrait utiliser une procédure multicritère interactive pour aider à la construction de suites d'actions. Par ailleurs, la procédure conjonctive pourrait être utilisée pour l'écrémage des ces dernières.

Une préoccupation comparable à celle soulevée précédemment concerne la description d'un événement. Il pourrait être intéressant de développer un outil d'aide à la description et à l'évaluation de l'événement. À quel moment un événement devient-il menaçant ? Quel niveau

d'alerte faut-il déclencher ? A-t-on les ressources pour apporter une réponse adéquate? Quelles sont les ressources à mobiliser ? Etc.

PAMSSEM, au niveau de l'exploitation, fournit un résultat basé sur les flux sortant en entrant pour chaque suite d'actions évaluée. Hors ces flux ont été établis à parur d'information comportant des imperfections. D'ailleurs on le reconnaît puisque l'on cherche à les maîtriser dans la modélisation (avec par exemple l'introduction des seuils). Les valeurs numériques des flux n'ont donc pas un pouvoir de discrimination absolu. Il serait intéressant de déterminer des seuils à ce niveau afin d'être en mesure d'interpréter les valeurs des flux de manière plus adéquate.

Ce sont là quelques pistes de recherche qui nous semblent intéressantes à poursuivre dans l'immédiat dans le cadre du CESA.

Références

[1] Pomerol, J.C. et Barba-Romero S. (1993), "Choix multicritère dans l'entreprise: principe et pratique", Hermes, Paris.

[2] Bouyssou, D. et Roy, B. (1987) : "la notion de seuils de discrimination en analyse multicritère", INFOR 25, 302-313.

[3] Brans, J. P., Mareschal, B. and Vincke, Ph. (1984), "PROMETHEE: A New Family of Outranking Methods in Multicriteria Analysis", dans Perny (1993).

[4] Brans, J. P. and Vincke, Ph. (1985), "A Preference Ranking Organisation Method (The PROMETHEE Method for Multiple Criteria Decision-Making)", Management Science, 31 (6), pp. 647-656.

[5] Chénard, L., (1995), "Fiabilité et disponibilité des systèmes sujets à des défaillances aléatoire", thèse de doctorat, Université Laval : Québec.

[6] Dyer, J.S. (1990), "Remarks on the Analytic Hierarchy Process", Man. Sciences, Vol. 36(3), pp. 249-258.

[7] Gbodoussou, A. (1989), " la notion de poids de critères/attributs en analyse multicritère-méthode empirique", thèse de Ph.D, Université Laval.

[8] Goldstein, W. M. (1990), "Judgements of Relative Importance in Decision Making : Global vs Local Interpretation of subjective weight", Org. Behavior and Human Dec. Processes, 47, pp. 313-336.

[9] Hokkanen, J. and Salminen, P. (1997), "Choosing a Solid Waste Management System using Multicriteria Decision Analysis", E.J.O.R., 98, pp. 19-36.

[10] Holder, R.D. (1990), "Some Comments on the Analytic Hierarchy Process", J. Apl. Res. Sol. 41(11), pp. 1073-1076.

[11] Kaufmann, A., (1975), "Modèles mathématiques pour l'étude de la fiabilité des systèmes", Masson : Paris.

[12] Lootsma, F.A. (1988), "Numerical Scaling of human judgement in pairwise-comparaison methods for fuzzy multicriteria decision analysis", in Mitra (ed.) mathematical models for decision support, Spring Verlag, Berlin, pp. 57-88.

[13] Mareschal, B. (1988), " Weight stability intervals in multicriteria decision aid ", U. L. B. (I.R.S.I.A) Service de mathématique de gestion, Campus Plaine - CP 210, Bvd. Du Triomphe, 1050 Brussels, Belgium.

[14] Martel, J.-M and D'Avignon, G., (1982), "Projects Orering with Multicriteria Analisys",E.J.O.R, 10(1), pp. 56-70.

[15] Martel, J-M. (1997), "Analyse des critères et de la procédure d'évaluation des suites d'actions envisageables", rapport final relié au contrat # 7701-6-1580 avec le CRDV, Université Laval, 169 pages.

[16] Mayestre, M., Pictet, J. et Simos, J. (1994), "Méthodes multicritère ELECTRE", Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.

[17] Mousseau, V. (1989), "La notion d'importance relative des critères", thèse de Ph.D, Université Paris-Dauphine.

[18] Munda, G. (1995), "Multicriteria Evolution in a Fuzzy Environment", Springer-Verlag.

[19] Rogers, M. and Bruen, M. (1998a), "A New System for Weighing Environmental Criteria for use within ELECTRE III", E.J.O.R, 107, pp. 552-563.

[20] Rogers, M. and Bruen, M. (1998b), "Choosing Realistic values of Indifference, Preference and Veto threshold for use with Environnemental Criteria within ELECTRE", E.J.O.R. 107, pp. 542-551.

[21] Rousseau, A. et Martel J.-M. (1994), "Environmental Assessment of an Electric Transmission Line Project : A MCDA Method", dans M. Paruccini (ed.), Applying Multiple Criteria Aid for Decision to Environnemental Management, Kluwer, pp. 163-185.

[22] Roy, B. (1968), "Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE)", Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, 8, pp. 57-75.

[23] Roy, B. (1978), " ELECTRE III : un algorithme de classement fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples", Cahier du CERO, 1, pp. 3-24.

[24] Roy, B. (1985), "Méthodologie multicritère d'aide à la décision", Économica, Paris.

[25] Roy, B., Present, M. et Silhol, D. (1986), " A programming method for determinig which Paris Metro Stations Should Be Renovated", E .J .O .R., 24, pp. 318-334.

[26] Roy, B. et Bouyssou, D. (1993), "Aide Multicritère à la Décision : Méthodes et cas", Economica, Paris.

[27] Saaty, T.L. (1980), "The Analytic Hierarchy Process", McGraw-Hill, New-York.

[28] Schärlig, A. (1996), "Pratique ELECTRE et PROMÉTHÉE, Presses Polytechnique et Universitaires Romandes, Lausanne, 1996.

[29] Simos, J. (1990), "Évaluer l'impact sur l'environnement", Presses Polytechnique et Universitaires Romandes, Lausanne.

[30] Wolters, W. T. M. and Mareschal B. (1995), " Novel types of sensitivity analysis for additive MCDM methods", E.J.O.R., 81, pp. 281-290.

[31] Yee, S.T. and Niall, M.F. (1998), "The Modified Star Graph and the Petal Diagram : Tow New Visual Aids for Discrete Aternative Multicriteria Decision Making", E.J.O.R., 7, pp. 20-33.

[32] Zeleny, M. (1982), "Multiple Criteria Decision Making", McGraw-Hill, New-York.

Defence Research and Development Canada | Recherche et développement pour la défense Canada | Canada

[redacted]

TITLE:(U) VALIDATION DE LA FAMILLE DE CRITERES ET DEVELOPPEMENT D'UN OUTIL DE VISUALISATION POUR LE PROTOTYPE CESA

PERSONAL AUTHOR: Martel, J-M.; Guitouni, A.; Jabeur, K.
CORPORATE AUTHOR: Defence Research Establishment Valcartier, Valcartier QUE (CAN);Laval Univ, Quebec QUE (CAN) Faculte des Sciences

ABSTRACT: (U) Le Centre de recherche pour la defense de Valcartier (CRDV) a entrepris des travaux pour developper un systeme d'aide a la decision pour le commandement et controle d'interventions dans un contexte de protection de l'espace aerien canadien. Dans une premiere version du CESA ("Commander's Expert System Advisor"), on a cherche a offrir au personnel militaire un outil pour decrire un evenement de violation de l'espace aerien canadien, de definir un ensemble de suites d'actions, et d'evaluer ces suites d'actions a partir de plusieurs facteurs (flexibilite, complexite, niveau de risque, capacite d'accomplissement, utilisation optimale des ressources) et sous-facteurs. Pour concevoir ce prototype, des sessions d'analyse de besoins et d'acquisition de connaissances ont ete menees aupres des membres du centre de commandement et de controle des forces de l'air Canadienne. Dans une premiere collaboration (contrat W7701-6-1580) entre des chercheurs du CRDV et ceux du CRAEDO (Centre de recherche pour l'aide a l'evaluation et a la decision dans les organisations), les facteurs et sous-facteurs de la premiere version du CESA ont ete analyses et reformules en 14 criteres; des recommandations ont ete formulees a ce sujet. Un rapport faisant etat de ces resultats et recommandations a ete deja depose aupres des autorites scientifiques du CRDV. TRUNCATED

DESCRIPTORS: (U) Expert computer systems;Decision making;Problem solving;Tactical command and control;Computer programs;Evaluation;Criteria;Airspace;Canada;Proving;Air defense
IDENTIFIERS: (U) CESA (Commander's Expert System

Advisor);Multicriteria;Coherent Family

REPORT NUMBER: DREV-CR-1999-031; Contractor Report	**REPORT DATE:** 01 Mar 1998	**NUMBER OF PAGES :** 93
DRDKIM N°: 99-00403	**CANDIS N°:** 510335	**Format(s):**Hardcopy;Document Image stored on Optical Disk

Date modified: 2003-04-17

Important Notices